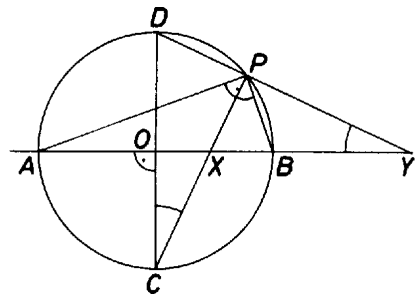
I. megoldás. Jelöljük a kör középpontját O-val, sugarát r-rel. Feltehetjük, hogy P a CD szakasz B felőli oldalán helyezkedik el, hiszen a bizonyítandó állítás A-ra és B-re nézve szimmetrikus. Két esetet különböztetünk meg.



1. ábra

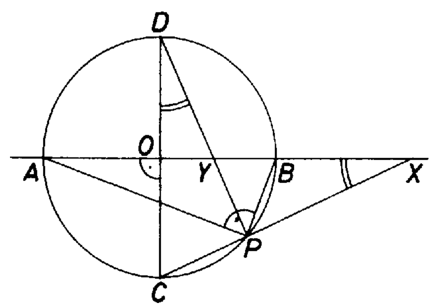
Ha P és D az AB egyenes ugyanazon oldalán van, akkor:

$$AX = r + OX, \quad BX = r - OX, \quad AY = r + OY \quad \text{és} \quad BY = OY - r.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy:

$$\frac{r + OX}{r + OY} = \frac{r - OX}{OY - r}.$$

Beszorzás és a lehetséges egyszerűsítések után az $OX \cdot OY = r^2$ egyenlőséghez jutunk. Ez viszont következik az OXC és az ODY derékszögű háromszögek hasonlóságából. (OCX szög és OYD szög merőleges szárú hegyesszögek.) A hasonlóság miatt $\frac{OX}{r} = \frac{r}{OY}$, ebben az esetben tehát igaz az állítás.



2. ábra

Ha P és D az AB egyenes két különböző oldalán van, akkor:

$$AX = r + OX, \quad BX = OX - r, \quad AY = r + OY \quad \text{és} \quad BY = r - OY.$$

Így azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{r + OX}{r + OY} = \frac{OX - r}{r - OY},$$

vagyis

$$OX \cdot OY = r^2.$$

Mivel az OXC és az ODY derékszögű háromszögek ebben az esetben is hasonlóak, azért $\dfrac{OX}{r} = \dfrac{r}{OY}$. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit és különböztessük meg ugyanazt a két esetet.

Az első esetben $AOD\sphericalangle = AOC\sphericalangle = COB\sphericalangle = 90°$, ezért (felhasználva, hogy egy adott körívhez tartozó középponti és kerületi szögek aránya 2 : 1):

$$DPA\sphericalangle = APC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = 45°.$$

Thalész tétele miatt $DPC\sphericalangle = APB\sphericalangle = 90°$, így $XPY\sphericalangle = 180° - DPC\sphericalangle = 90°$ és $BPY\sphericalangle = XPY\sphericalangle - CPB\sphericalangle = 90° - 45° = 45°$; vagyis az XPY derékszögű háromszögnek PB belső, AP pedig külső szögfelezője *(1. ábra)*. A külső illetve a belső szögfelezőtételt alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\frac{AX}{AY} = \frac{PX}{PY} \quad \text{és} \quad \frac{BX}{BY} = \frac{PX}{PY}.$$

Ezekből feladatunk állítása nyilvánvalóan következik.

A második esetben az elsővel teljesen megegyező módon látható be, hogy az XPY háromszögnek BP belső, AP pedig külső szögfelezője (az egyetlen különbség, hogy ezúttal $CPB\sphericalangle = 135°$).