

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 - x^2y^2 - x^2z^2 + y^2z^2 = 0, \\ (2) \quad & x^3 - y^3 - z^3 = 0, \\ (3) \quad & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

Alakítsuk szorzattá az első egyenlet baloldalát:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2y^2 - x^2z^2 + y^2z^2 &= 0, \\ (x^2 - y^2)(x^2 - z^2) &= 0, \\ (x + y)(x - y)(x + z)(x - z) &= 0. \end{aligned}$$

E szorzat értéke akkor nulla, ha az egyik tényező nulla. Ez négy esetet jelent. Ha azonban észrevesszük, hogy az y és a z szerepe szimmetrikus (felcserélhető) mindhárom egyenletben, akkor elég csupán két esetet megvizsgálni, és a kapott eredményt kiterjeszteni a másik kettőre. Nézzük e két esetet.

1. $x + y = 0$, vagyis $x = -y$. Ebben az esetben a (3) egyenletből $z = 1$ adódik. Felhasználva, hogy $x^3 = -y^3$, a (2) egyenletből $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. A feltételből pedig $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ adódik.

2. $x - y = 0$, vagyis ha $x = y$. Felhasználva, hogy $x^3 = y^3$, a második egyenletből $z = 0$ -t kapunk. Ezt felhasználva, mivel $x = y$, a (3) egyenletből: $x = y = \frac{1}{2}$.

Így kaptunk két megoldást, amelyek jók. (Akár ellenőrzésre, akár az ekvivalens átalakításokra hivatkozhatunk.) Alkalmazva, hogy az y felcserélhető z -vel az összes megoldást a következő táblázatban írjuk fel.

	x	y	z
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$	1
4	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$