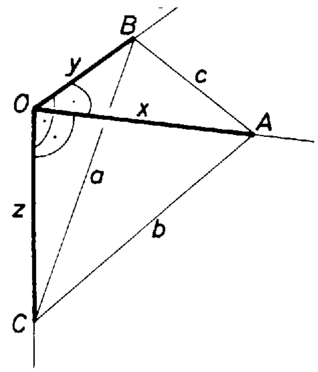
Tegyük fel, hogy egy kocka O csúcsából kiinduló három éle közül egy-egy átmegy az adott pontokon, amelyeket A, B, C-vel jelölünk. (A feladat szövegéből következik, hogy a kocka csúcsából kiinduló *három* él sorra átmegy egy-egy adott ponton.) Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel (ha A, B és C egy egyenesbe esik, akkor nyilván nem létezik megfelelő kocka), az OA, OB, OC távolságokat pedig rendre x, y, z-vel.



A BCO, CAO, ABO háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele szerint:

$$a^2 = y^2 + z^2, \tag{1}$$

$$b^2 = x^2 + z^2, \tag{2}$$

$$c^2 = x^2 + y^2. \tag{3}$$

(1)-et és (2)-t összeadva, majd abból (3)-at kivonva:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2z^2 > 0.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $a^2 + c^2 - b^2 > 0$ és $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, tehát a háromszög hegyesszögű. Ezért csak akkor létezhet megfelelő kocka, ha ABC hegyesszögű háromszög. Ekkor viszont mindig létezik is. Ha ugyanis ABC tetszőleges hegyesszögű háromszög, amelynek oldalai a, b, c, akkor az (1)–(3) egyenletrendszernek

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

megoldása, ezért az A középpontú x sugarú, a B középpontú y sugarú és a c középpontú z sugarú gömböknek van közös pontja. Ha ezt a közös pontot O jelöli, akkor az OA, OB, OC szakaszok egymásra páronként merőlegesek, tehát kiegészíthetők egy, a feltételeknek megfelelő kockává.