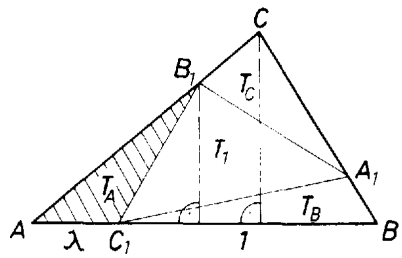
Ha az ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ háromszögek területe T, T_1 és T_2, akkor nyilván $T : T_1 = T_1 : T_2$, mivel az $A_1B_1C_1$ háromszöget ugyanazzal az eljárással kapjuk az ABC háromszögből, mint amelyikkel az $A_2B_2C_2$ háromszöget az $A_1B_1C_1$ háromszögből. Határozzuk meg először a $T : T_1$ arányt.



1. ábra

Először az AC_1B_1 háromszög T_A területét számoljuk ki. Mivel $\frac{C_1B}{AC_1} = \frac{1}{\lambda}$, ezért $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC_1 + C_1B}{AC_1} = 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda+1}{\lambda}$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\frac{CA}{CB_1} = \frac{\lambda+1}{\lambda}$, vagyis $\frac{CA}{B_1A} = \frac{1}{\frac{B_1A}{CA}} = \frac{1}{\frac{CA-CB_1}{CA}} = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+1}} = \lambda+1$. A párhuzamos szelők tételéből következően ez utóbbi arány megegyezik az ABC és az AC_1B_1 háromszögek AB, illetve AC_1 oldalához tartozó magasságok arányával. Ezért

$$\frac{T}{T_A} = \frac{AB}{AC_1} \cdot \frac{CA}{B_1A} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot (\lambda+1),$$

tehát $T_A = T \cdot \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}$.

Hasonló számítással kapjuk, hogy a BA_1C_1 és a CB_1A_1 háromszögek T_B, illetve T_C területe is $T \cdot \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}$. Ezért T_1 valóban csak T-től és λ-tól függ:

(1)
$$T_1 = T - (T_A + T_B + T_C) = T \cdot \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}\right).$$

Ennélfogva a második beírt háromszögre

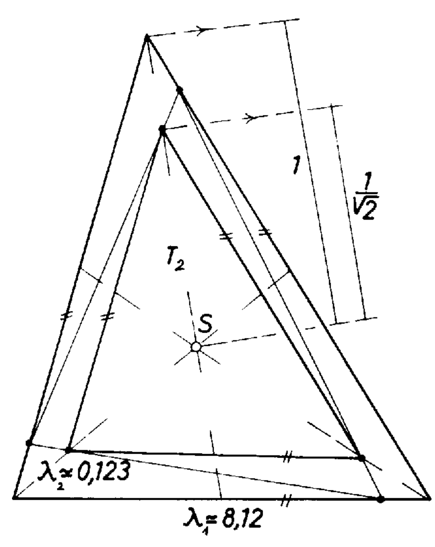
$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}\right) = T \cdot \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}\right)^2,$$

és ha $T_2 = \frac{1}{2}T$, akkor

$$\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}\right)^2,$$

vagyis

(2)
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\left(1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}\right).$$



2. ábra

Ha a jobb oldalon az előjel pozitív, akkor rendezés után a

$$(\sqrt{2}-1)\lambda^2-(2+\sqrt{2})\lambda+\sqrt{2}-1=0,$$
$$\text{azaz } \lambda^2-(3\sqrt{2}+4)\lambda+1=0$$

egyenletet kapjuk, aminek megoldásai

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+4+\sqrt{30+24\sqrt{2}}\right)\approx 8,119,$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+4-\sqrt{30+24\sqrt{2}}\right)\approx 0,123.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy λ ezen értékei mellett $T_2=\frac{1}{2}T$ teljesül.

Ha viszont a (2) egyenlet jobb oldalán az előjel negatív, akkor rendezés után a $\lambda^2+(3\sqrt{2}-4)\lambda+1=0$ egyenletet kapjuk, aminek nincsenek valós megoldásai.

Tehát feladatunk feltételeit λ_1 és $\lambda_2=\frac{1}{\lambda_1}$ elégíti ki.

Megjegyzések. 1. Eleve látható volt, hogy ha λ megoldása a feladatnak, akkor $1/\lambda$ is az, hiszen az osztópontok felvételénél mindegy, hogy melyik oldalra esik a hosszabb szakasz.

2. Az ismert $T=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ területképletet használva az (1) egyenletet egyszerűbb számolással is megkaphatjuk.