

Ismeretes, hogy a 2 pozitív egész kitevős hatványainak utolsó jegyei periodikusan ismétlődnek. Egy periódus hossza 4, az ismétlődő jegyek pedig: 2, 4, 8, 6. Ha  $n$  páratlan, akkor  $2^n$  2-re vagy 8-ra végződik, és így páratlan kitevő esetén  $2^n + 65$  utolsó jegye 7, ill. 3. Mivel négyzetszám utolsó jegye nem lehet sem 3, sem 7,  $n$  biztosan nem páratlan.

Legyen most  $n = 2k$ , ahol  $k$  pozitív egész. Lehet-e valamely  $x$  pozitív egészre:

$$2^{2k} + 65 = x^2,$$

azaz

$$65 = x^2 - (2^k)^2 = (x - 2^k)(x + 2^k).$$

Mivel  $x + 2^k$  és  $x - 2^k$  pozitív egész szám, ezért a 65 osztóinak kell lenniük. De  $x - 2^k < x + 2^k$ , tehát a következő esetek lehetségesek:

$$x - 2^k = 1, \quad x + 2^k = 65;$$

$$x - 2^k = 5, \quad x + 2^k = 13.$$

A két egyenletrendszert megoldva a következő eredményt kapjuk:

$$x = 33, \quad 2^k = 32, \quad k = 5, \quad n = 10;$$

$$x = 9, \quad 2^k = 4, \quad k = 2, \quad n = 4.$$

Tehát  $n = 4$  és ekkor  $2^n + 65 = 9^2$ , vagy pedig  $n = 10$  és ekkor  $2^n + 65 = 33^2$ .

*Szeidl Ádám* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., I. o. t.) megoldása alapján