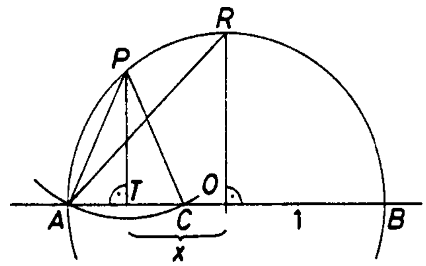
Legyen O az AB átmérőjű kör középpontja, T a P pont AB egyenesen lévő merőleges vetülete, R pedig a P-t tartalmazó AB ív felezőpontja.



A feladatban megadott feltételek alapján $PA = PC$, tehát az APC háromszög egyenlő szárú, azaz $AT = TC$; így a háromszög területe:

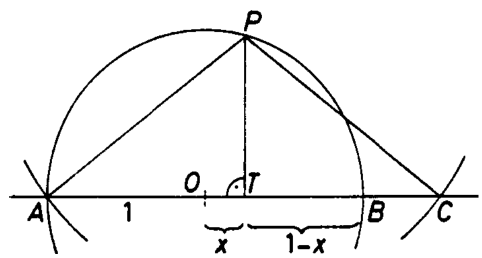
$$T_{APC} = AT \cdot TP. \tag{1}$$

Ennek a kifejezésnek kell a maximumhelyét ill. helyeit meghatároznunk.

Tekintsük először azt az esetet, amikor T az AO szakasz belső pontja. Ekkor (1) értéke nem lehet maximális, hiszen $AT < AO$ és $TP < OR$ miatt

$$T_{APC} = AT \cdot TP < AO \cdot OR = T_{ARB}.$$

A következőkben a másik esetet vizsgáljuk, ha T a BO szakasz B-től különböző pontja.



A kör sugarát egységnyinek választjuk. Jelöljük az OT szakasz hosszát x-szel, amire ekkor $0 \leqq x < OA = 1$ teljesül.

Írjuk fel az APB derékszögű háromszögre a magasságtételt:

$$TP = \sqrt{AT \cdot TB} = \sqrt{(1+x)(1-x)}.$$

Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{APC} = AT \cdot TP = (1+x)\sqrt{(1+x)(1-x)} = \sqrt{(1+x)^3(1-x)}. \tag{2}$$

Mivel az $y \mapsto c\sqrt{y}$ függvény (ahol $c > 0$, állandó, $y > 0$) szigorúan növő, ezért a fenti kifejezés pontosan akkor a legnagyobb, amikor a $\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x) \cdot 3}$ az.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[4]{(1+x)^3(3-3x)} \leqq \frac{(1+x)+(1+x)+(1+x)+(3-3x)}{4} = \frac{3}{2}.$$

Innen látható, hogy a bal oldali kifejezés pontosan akkor maximális, amikor a tényezői egyenlőek, vagyis $1 + x = 3 - 3x$, $x = \dfrac{1}{2}$ esetén.

Tehát az APC háromszög területe akkor a legnagyobb, ha T az OB szakasz felezőpontja.