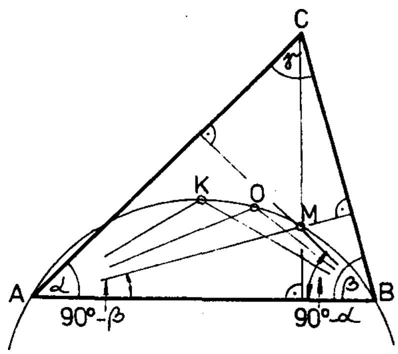
Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon $\alpha$, $\beta$, $\gamma$-val. Az $O$ pont a szögfelezők metszéspontja, ezért

$$AOB\sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Az $AKB\sphericalangle$ a körülírt körben az $AB$ húrhoz tartozó középponti szög, ezért kétszerese az ugyanehhez a húrhoz tartozó kerületi szögnek: $AKB\sphericalangle = 2\gamma$. Az $AMB$ szög meghatározásánál három esetet kell megkülönböztetnünk:

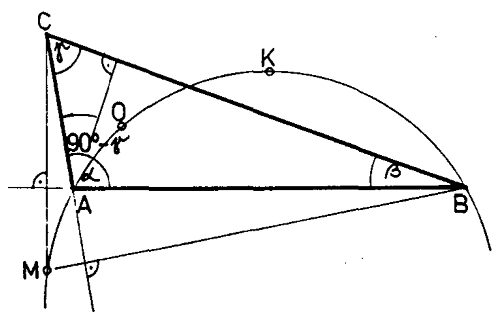
**1.** $\alpha < 90^\circ$ és $\beta < 90^\circ$. Ekkor $AMB\sphericalangle = 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)) = 180^\circ - \gamma$ (*1. ábra*).




*1. ábra*

**2.** $\alpha = 90^\circ$ vagy $\beta = 90^\circ$. Ekkor a háromszög derékszögű, $M$ egybeesik az $A$ vagy a $B$ csúccsal.

**3.** $\alpha$ és $\beta$ egyike tompaszög. Ekkor $AMB\sphericalangle = 180^\circ - ((90^\circ - \gamma) + 90^\circ) = \gamma$ (*2.ábra*).




*2. ábra*

Állításunk bizonyítását is három esetre kell bontanunk a fentieknek megfelelően.

Az 1. esetben az $O$ és az $M$ pontok az $AB$ egyenesnek ugyanazon az oldalán – a háromszög $C$ csúcsát tartalmazó oldalán – helyezkednek el, ezért

$$90^\circ + \frac{\gamma}{2} = AOB\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma,$$

vagyis $\gamma = 60^\circ$. Így $AKB\sphericalangle = 120^\circ$, tehát $AKB\sphericalangle = AOB\sphericalangle$, és $K$ is az $AB$ egyenesnek $O$-val megegyező oldalán helyezkedik el – az $ABC$ háromszög hegyesszögű – vagyis $K$ rajta van az $ABOM$ körön.

A 2. esetben az $A$, $B$, $O$, $M$ pontok mindig egy körön vannak, a $K$ pont pedig csak akkor van rajta ezen a körön, ha $90^\circ + \dfrac{\gamma}{2} = AOB\sphericalangle = AKB\sphericalangle = 2\gamma$, vagyis ha $\gamma = 60^\circ$. Állításunk tehát ebben az esetben is igaz, és a háromszög szögei $90^\circ$, $60^\circ$, $30^\circ$.

A 3. esetben az $O$ és az $M$ pontok az $AB$ egyenesnek két különböző oldalán helyezkednek el, ezért $AOB\sphericalangle + AMB\sphericalangle = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2} + \gamma = 180^\circ$, vagyis $\gamma = 60^\circ$. Ebben az esetben $K$ az $AB$ egyenesnek $O$-val megegyező oldalán van és $AKB\sphericalangle = 120^\circ = AOB^\circ$, ezért $K$ valóban rajta van az $ABOM$ körön.

*Horváth István* (Fonyód, Magyar B. Ált. Isk. 8. o. t.) dolgozata alapján