Megoldás. Belátjuk, hogy ha a pozitív a, b, c számokra $a \geqq b \geqq c$, akkor

$$a^2+3b^2+5c^2 \leqq (a+b+c)^2. \tag{1}$$

Innen a bizonyítandó állítás már következik, hiszen a feltétel szerint $a+b+c \leqq 1$, így (1) jobb oldala sem lehet 1-nél nagyobb.

A feltétel szerinti egyenlőtlenségekből

$$\begin{gathered} a \geqq b > 0 \text{ miatt } ab \geqq b^2, \\ b \geqq c > 0 \text{ miatt } bc \geqq c^2, \text{ végül} \\ a \geqq c > 0 \text{ miatt } ac \geqq c^2 \text{ következik.} \end{gathered}$$

A három egyenlőtlenséget összeadva

$$ab++bc+ac \geqq b^2+2c^2,$$

azaz

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqq a^2+b^2+c^2+2(b^2+2c^2) = a^2+3b^2+5c^2,$$

és ezt kellett bizonyítani.

A bizonyításból kiolvasható, hogy a bizonyítandó állításban pontosan akkor áll egyenlőség, ha $a=b=c$, másfelől $a+b+c=1$, azaz $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján.

Megjegyzés. Általában igazoljuk, hogy ha a pozitív $a_1, \cdots, a_n$ számokra

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n, \text{ akkor}$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \geqq \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot a_i^2.$$

Végezzük el az $(a_1+\cdots+a_n)^2$ négyzetre emelést: így n^2 darab kéttényezős $a_u \cdot a_v$ szorzatot kapunk ($1 \leqq u \leqq n$ és $1 \leqq v \leqq n$). Készítsünk n darab csoportot ezekből a szorzatokból! Azok az $a_u a_v$ szorzatok kerüljenek az i edik csoportba, ahol az u, v indexek nagyobbika éppen i. Az i -edik csoportban ekkor $2i-1$ darab szorzat lesz, ezek a következők: a_1a_i, a_2a_i, $\ldots$, a_ia_i, a_ia_{i-1}, $\ldots$, a_ia_1. Az a_i számok rendezése és pozitív volta miatt e szorzatok mindegyike legalább a_i^2, így az i-edik csoportban álló számok összege valóban legalább $(2i-1)\cdot a_i^2$.

György András (Budapest, Árpád Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján.