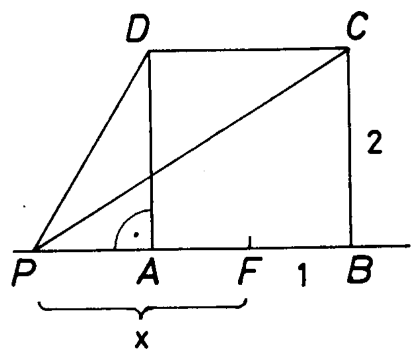
Megoldás. Válasszuk a négyzet oldalát 2 egységnyinek és legyen F az AB oldal felezőpontja, P és F távolságát pedig jelöljük x-szel. Elegendő azt az esetet vizsgálnunk, amikor $PC \geqq PD$, vagyis amikor P az F-től induló, A-t tartalmazó félegyenesen mozog, mert ha P' az F-től induló, B -t tartalmazó félegyenes tetszőleges pontja, akkor P' F-re vonatkozó P tükörképe az A-t tartalmazó félegyenesen mozog, és a szimmetria miatt a B-t tartalmazó félegyenesre vonatkozó korlátok éppen az A-t tartalmazó félegyenesre vonatkozó korlátok reciprokai.



1. ábra

A PBC és a PAD háromszögek derékszögűek, $BC = AD = 2$, $PB = 1 + x$ és $PA = 1 - x$ vagy $x - 1$, attól függően, hogy P az FA szakaszon van, vagy nem. Pitagorasz tétele szerint $PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{(1+x)^2 + 4}$ és $PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = \sqrt{(1-x)^2 + 4}$. Ezekkel

$$\frac{PC}{PD} = \frac{\sqrt{(1+x)^2+4}}{\sqrt{(1-x)^2+4}} = \sqrt{1 + \frac{4x}{x^2 - 2x + 5}}.$$

A vizsgált arány értéke tehát csak a $4x/(x^2 - x + 5)$ tört értékétől függ. Mivel $x \geqq 0$ és a tört nevezője pozitív, ezért a tört minimális értéke 0. Ha a maximális értéket m-mel jelöljük, akkor m az a legnagyobb szám, amelyre a

$$\frac{4x}{x^2 - 2x + 5} = m$$

egyenletnek van valós megoldása, az $mx^2 - (2m+4)x + 5m = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa, $D = (2m+4)^2 - 20m^2$ nem negatív. A $D \geqq 0$ egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq m \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a $4x/(x^2 - 2x + 5)$ tört maximális értéke $(1+\sqrt{5})/2$, így a PC/PD arány legnagyobb értéke

$$\sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ezt az értéket a szóban forgó arány föl is veszi, mégpedig akkor, ha $PF = x = \sqrt{5}$. Ezért ha a P pont az A-t tartalmazó félegyenesen mozog, akkor

$$1 \leqq \frac{PC}{PD} \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

ha pedig P a B-t tartalmazó félegyenesen mozog, akkor

$$1 \geqq \frac{PC}{PD} \geqq 1 \bigg/ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Összefoglalva:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq \frac{PC}{PD} \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Megjegyzések.

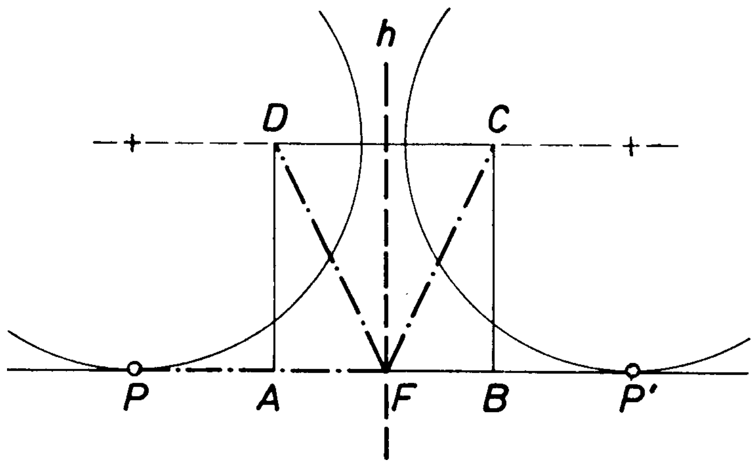
1) Áttekinthetőbbé válik a feladat megoldása, ha felismerjük egy, a geometriai szélsőértékfeladatok megoldása során általában is gyakran használható elv érvényesülését.

Tegyük fel, hogy egy a sík pontjain értelmezett $f(P)$ függvény – jelen esetben a PC/PD arány – szélsőértékeit keressük egy adott Γ görbén: ez most a négyzet AB oldalegyenese. Tekintsük ehhez az $F(P)$=*állandó* egyenletű görbesereg elemeit az F függvény úgynevezett nívóhalmazait. Ismeretes, hogy most ezek a görbék körök – a C, D pontokhoz tartozó ún. Apollóniusz-féle körök – illetve $PC/PD=1$ esetben a CD felező merőlegese.

Egy-egy ilyen vonal két részre osztja a síkot. Az egyik a körvonal belseje, a másik pedig annak külseje. (A felező merőleges esetén persze két félsíkot kapunk.) A két tartomány egyikében az $F(P)$ értéke kisebb, másikban pedig nagyobb, mint a határoló görbén.

Így az $F(P)$ mennyiség a Γ görbén azokban a pontokban veszi föl a szélsőértékét, ahol ennek a körseregnek – az Apollóniusz-féle köröknek – a megfelelő eleme Γ-t, itt az AB egyenest érinti.

Az érintési pont megszerkesztéséhez pedig azt kell tudnunk, hogy a CD szakasz felező merőlegese – a h egyenes – azon pontok mértani helye, ahonnan a fenti körhalmazok minden egyes kör eleméhez egyenlő hosszúságú érintők húzhatók: a h a körsor ún. hatványvonala. Mivel C és D is a körsor elemei – az ún. pontkörök – az F pontból $FC=FD$ hosszúságú érintő húzható minden egyes Apollóniusz-féle körhöz *(2. ábra)*.



2. ábra

Az AB egyenest érintő körelemek érintési pontjait tehát az F-re szimmetrikusan $FP=FC$ távolságra kapjuk az AB egyenesen. Könnyű számolással kapjuk, hogy ezekre a pontokra az $F(P)=PC/PD$ arány $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, illetve ennek reciproka. Az AB egyenes minden további pontja e köröknek külső pontja, így annak tetszőleges Q pontjára

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq QC/QD \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

2) Sok megoldó csak azt az esetet vizsgálta, amikor P az AB szakaszon mozog. Ekkor a feladat megoldása némileg egyszerűbb, s a kapott korlátok a helyes eredménytől különböznek, hiszen a PC/PD arány $x=\sqrt{5}$ esetén veszi fel a maximumát, tehát amikor P az AB szakaszon kívül van; ezért ezek a dolgozatok csak 2–3 pontot érdemeltek.