I. megoldás. Jelöljük a háromszög súlyvonalait s_a, s_b, s_c-vel. Tudjuk, hogy a súlyvonal nem kisebb, mint a megfelelő magasságvonal, ezért:

$$m_a \cdot m_b + m_b \cdot m_c + m_c \cdot m_a \leqq s_a \cdot s_b + s_b \cdot s_c + s_c \cdot s_a. \tag{1}$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint tetszőleges x, y (pozitív) számok esetén $x \cdot y \leqq \dfrac{x^2+y^2}{2}$, így

$$s_a \cdot s_b + s_b \cdot s_c + s_c \cdot s_a \leqq \frac{{s_a}^2+{s_b}^2}{2} + \frac{{s_b}^2+{s_c}^2}{2} + \frac{{s_c}^2+{s_a}^2}{2} = {s_a}^2+{s_b}^2+{s_c}^2. \tag{2}$$

A súlyvonalak négyzetét viszont kifejezhetjük a háromszög oldalaival (ennek az ismert képletnek a bizonyítása megtalálható pl. a Geometriai feladatok gyűjteménye I., 1673/a és 1671. feladataiban):

$$s_a^2+{s_b}^2+{s_c}^2 = \frac{1}{4}[(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)] = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2). \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) képletek együtt éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adják. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha a háromszög szabályos.

Nagy Judit (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Jelöljük a háromszög területét T-vel. Az ismert területképlet alapján $m_a = \dfrac{2T}{a}$, $m_b = \dfrac{2T}{b}$, $m_c = \dfrac{2T}{c}$, vagyis a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$\frac{4T^2}{ab} + \frac{4T^2}{bc} + \frac{4T^2}{ca} \leqq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Rendezve, és felhasználva Heron képletét, mely szerint

$$T^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$$

(ennek bizonyítása megtalálható pl. a Geometriai feladatok gyűjteménye I. 1472 feladatában), a kérdéses egyenlőtlenség így alakul:

$$(a+b+c)^2(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leqq 3abc(a^2+b^2+c^2). \tag{4}$$

Ezt – a bizonyítandóval ekvivalens – egyenlőtlenséget két részre bontva igazoljuk. Tudjuk, hogy:

$$\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} = \sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqq \sqrt{a^2} = a,$$

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} = \sqrt{b^2-(a-c)^2} \leqq \sqrt{b^2} = b,$$

$$\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} = \sqrt{c^2-(b-a)^2} \leqq \sqrt{c^2} = c.$$

Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy:

$$(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leqq abc. \tag{5}$$

Másrészt fennáll, hogy

$$(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2), \tag{6}$$

hiszen ezt rendezve a nyilvánvaló

$$0 \leqq 2(a^2+b^2+c^2) - 2ab - 2bc - 2ca = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. (5)-öt és (6)-ot összeszorozva éppen (4)-et kapjuk.

Farkas Zénó (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)