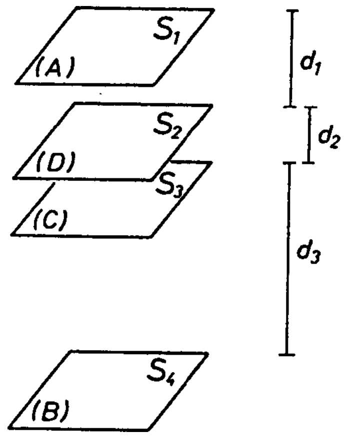
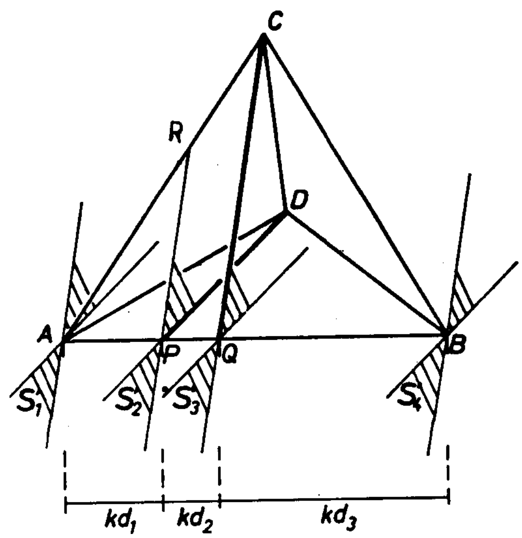
Megoldás. Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy nem a négy adott síkhoz keresünk megfelelő tetraédert, hanem előbb egy adott szabályos tetraéderhez keresünk négy párhuzamos síkot úgy, hogy a síkok távolságainak aránya megegyezzen a négy adott sík távolságainak arányával. Elegendő megmutatnunk, hogy egy adott tetraéderhez létezik négy ilyen sík, hiszen ekkor egy megfelelő arányú nagyítással elérhető, hogy a síkok távolságai megegyezzenek a négy adott sík távolságával, s a nagyított tetraéder – amely hasonló az eredetihez – csúcsai pedig illeszkednek ezekre a síkokra.



1. ábra



2. ábra

Legyen a négy adott sík S_1, S_2, S_3 és S_4, – S_1 és S_4 a legtávolabbiak –, az S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4 távolságok rendre d_1, d_2, d_3 *(1. ábra)*, $ABCD$ pedig legyen egy tetszőleges szabályos tetraéder. Legyenek P és Q a tetraéder AB élének azok a pontjai, melyekre $AP : PQ : QB = d_1 : d_2 : d_3$ *(2. ábra)*.

A PD és a QC egyenesek kitérőek, mert ha egy síkban lennének, akkor az eredeti tetraéder AB és CD élei is egysíkúak lennének. Ezért egyértelműen léteznek olyan S_2' és S_3' síkok, amelyek egymással párhuzamosak, S_2' tartalmazza a PD, S_3' pedig a QC szakaszt. (Ha PR a P-n átmenő, QC-vel párhuzamos egyenes, akkor S_2' éppen a PRD sík.) Legyen S_1' illetve S_4' az A-t, illetve B-t tartalmazó, S_2'-vel és S_3'-vel párhuzamos sík. Ekkor a párhuzamos szelők tétele miatt az$S_1'S_2'$, $S_2'S_3'$, $S_3'S_4'$ síkpárok távolságainak aránya éppen $AP : PQ : QB$, vagyis $d_1 : d_2 : d_3$, tehát megegyezik az S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4 síkpárok távolságainak arányával.

Megjegyzés. A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy az $ABCD$ tetraéder szabályos, így állításunk általánosabb formában is igaz:

Ha adott egy tetszőleges tetraéder és négy párhuzamos sík, akkor létezik olyan tetraéder, mely az adotthoz hasonló és mind a négy síkban van csúcsa.

Dombi Gergely (Pécs, JPTE 1. sz. Gyak. Ált. Isk., 7. o. t.)