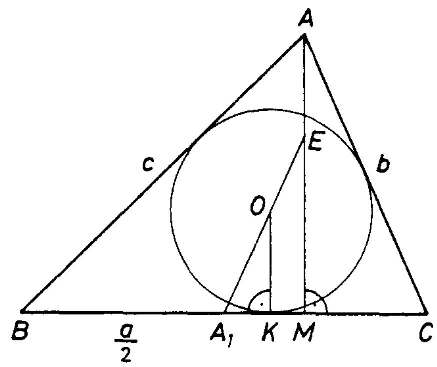
Megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, területét T-vel, beírt körének a sugarát ϱ-val. Legyen az A-ból induló magasságvonal talppontja M, a beírt körnek a BC oldalon lévő érintési pontja pedig K. Választhatjuk úgy a jelölést, hogy $c > b$ teljesüljön. (Ha $c = b$ akkor az OA_1 és az AM egyenesek egybeesnek, az E pont nem egyértelmű, állításunk semmitmondó.)



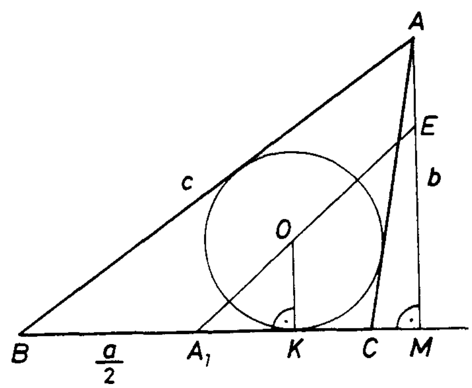
1. ábra

Először megmutatjuk, hogy $MA_1 = \dfrac{c^2 - b^2}{2a}$. Ha a C csúcsnál lévő szög hegyesszög, akkor M a CA_1 szakasz belső pontja, tehát $MA_1 = CA_1 - CM$ (*1. ábra*). Az AMC és AMB derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint $b^2 - CM^2 = AM^2 = c^2 - (a - CM)^2$. Ezekből az egyenletekből kapjuk, hogy

$$CM = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

tehát

$$MA_1 = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$



2. ábra

Ha a C csúcsnál lévő szög tompaszög vagy derékszög, akkor C az A_1M szakasz belső pontja lévén $MA_1 = CA_1 + CM$ (*2. ábra*). Az AMC és AMB derékszögű háromszögekből: $b^2 - CM^2 = AM^2 = c^2 - (a + CM)^2$, innen $CM = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}$. Tehát ekkor is

$$MA_1 = \frac{a}{2} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$

Az OK és EM szakaszok párhuzamosak, hiszen mindkettő merőleges BC-re. Ezért az A_1EM és az A_1OK háromszögek hasonlóak, így $\dfrac{EM}{OK} = \dfrac{A_1M}{A_1K}$, vagyis $EM = \dfrac{A_1M}{A_1K} \cdot OK$. Ismeretes (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I. 642. és 1470. feladat), hogy $A_1K = A_1C - KC = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{c-b}{2}$ és $OK = \varrho = \dfrac{2T}{a+b+c}$, ezekkel pedig

$$EM = \frac{\dfrac{c^2 - b^2}{2a}}{\dfrac{c-b}{2}} \cdot \frac{2T}{a+b+c} = \frac{2(c+b) \cdot T}{a(a+b+c)}.$$

Másrészt a BC oldalhoz tartozó magasság az ismert területképlet szerint:

$$AM = \frac{2T}{a}\,.$$

Tehát:

$$AE = AM - EM = \frac{2T(a+b+c)}{a(a+b+c)} - \frac{2T(b+c)}{a(a+b+c)} = \frac{2T}{a+b+c} = \varrho.$$

Szendrei Tamás (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján