I. megoldás. Legyen r tetszőleges valós szám, és legyen

$$x=\frac{r^2-2r}{r^2-r+1};\quad y=\frac{r^2-1}{r^2-r+1}. \tag{1}$$

Ekkor a könnyű számolással kapható

$$(r^2-2r)^2-(r^2-2r)(r^2-1)+(r^2-1)^2=(r^2-r+1)^2$$

azonosság azt jelenti, hogy az (1) formulákkal kapott x és y megoldásai az

$$x^2-xy+y^2=1$$

egyenletnek. Ha r racionális, akkor x és y is azok. Meg kell még mutatnunk, hogy a fenti formulák végtelen sok különböző x-et és y-t szolgáltatnak. Ez pedig nyilván következik abból, hogy az

$$\frac{r^2-2r}{r^2-r+1}=\alpha \quad \text{és az} \quad \frac{r^2-1}{r^2-r+1}=\beta$$

egyenletnek minden valós α-ra és β-ra legfeljebb $2-2$ megoldása van – mindkettő legfeljebb másodfokú, de legalább elsőfokú – és mivel a formulákban x és y helyére minden racionális szám beírható, így valóban végtelen sok megoldást kapunk.

Megjegyzés. Érdekes lehet az (1) formulák eredete. Ha bevezetjük a $t=y/x$ jelölést, akkor t-re és x-re az $x^2(t^2-t+1)=1$ egyenletet kapjuk, azaz elegendő olyan racionális t értéket találni, amelyre t^2-t+1 egy racionális szám, $1/x$ négyzete. Így a

$$t^2-\frac{1}{x^2}=t-1$$

feltételt kapjuk, ahonnan

$$\left(t-\frac{1}{x}\right)\left(t+\frac{1}{x}\right)=t-1 \tag{2}$$

adódik. Ha most r tetszőleges, 0-tól különböző racionális szám, akkor a

$$\left.\begin{aligned} t-1/x&=r(t-1)\\ t+1/x&=1/r \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

egyenletrendszer megoldásaira teljesül (2), és így x-re és $y=tx$-re fennáll $x^2-xy+y^2=1$. Az (1) formulák pedig éppen a (3) egyenletrendszer megoldásával adódnak.

II. megoldás. Vezessük be az $u+v=x; u-v=y$ új ismeretleneket. Ezekre nézve egyenletünk az

$$u^2+3v^2=1 \tag{4}$$

alakot ölti. Ha ennek az egyenletnek megtaláljuk végtelen sok racionális (u,v) megoldását, akkor a belőlük kiszámolt x,y is racionális megoldása lesz az $x^2-xy+y^2=1$ egyenletnek, és ezek is mind különbözőek, mivel az egyenletrendszer alapján x és y egyértelműen meghatározza u és v értékét. Felhasználva az

$$(u^2+3v^2)^2=(u^2-3v^2)^2+12u^2v^2=(u^2-3v^2)^2+3\cdot(2uv)^2$$

azonosságot, látható, hogy ha u_0 és v_0 a (4) egyenlet egy racionális megoldása, akkor

$$u_1=3v_0^2-u_0^2;\quad v_1=2u_0v_0 \tag{5}$$

szintén megoldás.

Ha most a „triviális” $u_0=v_0=1/2$ megoldásból indulunk ki, akkor (5) – lényegében – nem ad új megoldást. Tovább keresve azt találjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2+3\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2=1,$$

azaz

$$u_0=\frac{1}{7};\quad v_0=\frac{4}{7}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ebből az (5) formulák révén különböző megoldásokat kapunk.
Írjuk ehhez u_n-et és v_n-et

$$u_n=\frac{a_n}{7^{2^n}},\quad \text{illetve} \quad v_n=\frac{b_n}{7^{2^n}}$$

alakba. Ekkor az (5) formulák alapján $a_0 = 1,\ b_0 = 4$ és

$$a_{n+1} = 3b_n^2 - a_n^2, \quad \text{illetve} \quad b_{n+1} = 2a_n b_n. \tag{6}$$

Ha megmutatjuk, hogy sem a_n, sem pedig b_n nem oszthatók 7-tel, akkor az $u_n,\ v_n$ párok valóban különbözők minden n értékre, hiszen egyszerűsített alakjukban nevezőik a 7 különböző hatványai.

Tekintsük ehhez a számlálók, a_n és b_n maradékát 7-tel osztva az alábbi táblázat szerint:

n	a_n	b_n
0	1	4
1	5	1
2	6	3
3	5	1

Látható, hogy a_1 és a_3, illetve b_1 és b_3 ugyanazt a maradékot adják 7-tel osztva. Így innen kezdve periodikusan ismétlődnek a maradékok, a 0 tehát valóban nem szerepel köztük.

Megjegyzés. A fenti u_n és v_n változókra nyert összefüggésekből az x, y sorozatokra az

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n y_n; \quad y_{n+1} = y_n^2 - 2x_n y_n$$

rekurziót kapjuk. Az $x_0 = 5/7;\ y_0 = -3/7$ kezdeti megoldásból így közvetlenül kaphatjuk az $x^2 - xy + y^2 = 1$ egyenlet újabb megoldásait.

Molnár-Sáska Gábor (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)