**I. megoldás.** Bebizonyítjuk, hogy az egyenlet azonosság, a két oldal minden valós $x$-re egyenlő. Írjuk $x$-et $6k+r$ alakba, ahol $k$ egész és $0 \leqq r < 6$. Ekkor a minden egész $n$-re és valós $x$-re fennálló

$$[x+n] = [x] + n$$

azonosság felhasználásával egyenlőségünk az eredeti

$$\left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r+2}{6}\right] + \left[\frac{r+4}{6}\right] = \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r+3}{6}\right]$$

alakot ölti; ez azt jelenti, hogy elegendő a $[0;6)$ intervallumon igazolni a szóban forgó azonosságot.

Osszuk ehhez négy részre a $[0;6)$ intervallumot; ez megtehető úgy, hogy az egyes részintervallumokban állandók legyenek a bizonyítandó egyenlőség két oldalán szereplő összegek tagjai. Ezek az intervallumok a következők:

$$I_1 = [0;2),\ I_2 = [2;3),\ I_3 = [3;4),\ I_4 = [4;6).$$

Az egyes részeken a megfelelő mennyiségek értékét az alábbi táblázat tartalmazza:

| $r$ | $\frac{r}{3}$ | $\frac{r+2}{6}$ | $\frac{r+4}{6}$ | Bal oldal értéke | $\frac{r}{2}$ | $\frac{r+3}{6}$ | Jobb oldal értéke |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[0;2)$ | $[0;\frac{2}{3})$ | $[\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ | $[\frac{2}{3};1)$ | 0 | $[0;1)$ | $[\frac{1}{2};\frac{5}{6})$ | 0 |
| $[2;3)$ | $[\frac{2}{3};1)$ | $[\frac{2}{3};\frac{5}{6})$ | $[1;\frac{7}{6})$ | 1 | $[1;\frac{3}{2})$ | $[\frac{5}{6};1)$ | 1 |
| $[3;4)$ | $[1;\frac{4}{3})$ | $[\frac{5}{6};1)$ | $[\frac{7}{6};\frac{4}{3})$ | 2 | $[\frac{3}{2};2)$ | $[1;\frac{7}{6})$ | 2 |
| $[4;6)$ | $[\frac{4}{3};2)$ | $[1;\frac{4}{3})$ | $[\frac{4}{3};\frac{5}{3})$ | 3 | $[2;3)$ | $[\frac{7}{6};\frac{3}{2})$ | 3 |

Látható, hogy az egyenlőség minden $0 \le r < 6$ valós számra teljesül, és így a bevezetőben említettek szerint valóban

$$\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x+2}{6}\right] + \left[\frac{x+4}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+3}{6}\right]$$

minden valós $x$-re.

**II. megoldás.** Az alábbi gondolatmenet egy önmagában is érdekes segédtétel felhasználásával kombinatorikai jelentést tulajdonít az egyenlőségben szereplő tagoknak, és ezzel a feladat hátterére is jobban rávilágít. Jegyezzünk meg annyit az első megoldásból, hogy az azonosságot elegendő a $[0;6)$ intervallumon – valójában bármely $[a;a+6)$ intervallumon – igazolni; mi most tetszőleges *nemnegatív* $x$-re bizonyítjuk be. Segítségünkre lesz ehhez az alábbi

*Lemma:* Ha $0 < r < d$ adott egészek és $x \ge 0$, akkor a $(0;x]$ intervallumban pontosan $\big[(x+d-r)/d\big]$ darab olyan egész szám van, amelyik $d$-vel osztva $r$ maradékot ad. A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy az $r=0$ esetben ez az érték $[x/d]$.

A bizonyítandó azonosság azonnal következik a lemmából. Eszerint ugyanis ha $x \ge 0$, akkor a bal oldalon a 3-mal osztható, illetve a 6-tal osztva 4 vagy 2 maradékot adó $(0;x]$-beli egészek száma, a jobb oldalon pedig a páros, illetve a 6-tal osztva 3 maradékot adó $(0;x]$-beli egészek száma áll. A két számhalmaz nyilván azonos, hiszen mindkét esetben a $(0;x]$-beli $6k$; $6k+2$; $6k+3$; $6k+4$ alakú számokról van szó; így elemszámuk is egyenlő, a bal oldal tehát valóban egyenlő a jobb oldallal, ha $x \ge 0$.

Hátra van még a lemma bizonyítása. Kezdjük először az $r=0$ esettel. Ez meglehetősen nyilvánvaló, hiszen a pozitív egész $d$-nek nyilván éppen annyi többszöröse van 0 és $x$ között, mint ahány pozitív egész van 0 és $x/d$ között: ez utóbbi mennyiség pedig az egészrész definíciója szerint nem más, mint $[x/d]$.

Az általános esetben vegyük észre, hogy az $x \mapsto x+d-r$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $(0;x]$-beli, $d$-vel osztva $r$ maradékot adó számok halmazát a $(d-r;\ x+d-r]$-beli, $d$-vel osztható számok halmazára. Mivel pedig az $r>0$ esetben a $(0;d-r]$ intervallumban nincsen $d$-vel osztható szám, a keresett mennyiség éppen a $d$ többszöröseinek a száma a $(0;x+d-r]$ intervallumban, amelyről pedig az $r=0$ eset vizsgálatakor már láttuk, hogy $[(x+d-r)/d]$-vel egyenlő.

Ezzel a lemmát teljes egészében igazoltuk és így a bizonyítást befejeztük.