I. megoldás. A feladat állításánál többet igazolva megmutatjuk, hogy

$$\frac{(n-1)(n+1)^n - n(n+1)^{n-1} + 1}{n^2} \tag{1}$$

minden pozitív egész n-re egész szám. Ebből $n = 1990$ helyettesítéssel a feladat állítását kapjuk.

A bizonyításhoz alakítsuk át (1) számlálóját:

$$(n-1)(n+1)^n - n(n+1)^{n-1} + 1 = (n^2-1)(n+1)^{n-1} - n(n+1)^{n-1} + 1 =$$
$$= n^2(n+1)^{n-1} - [(n+1)^n - 1].$$

Az első tag osztható n^2-tel, így elegendő igazolni, hogy

$$n^2 \mid (n+1)^n - 1.$$

Ez az oszthatóság gyorsan adódik például a binomiális tételből, mi most egy másik utat választunk. Ismeretes, hogy két szám n-edik hatványának különbsége szorzattá alakítható. Ezt alkalmazva:

$$(n+1)^n - 1 = n[(n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1)^2 + (n+1) + 1].$$

Látható, hogy a kapott szorzat második tényezőjében az n darab tag mindegyike $(n+1)$ hatványa, és így n-nel osztva 1 maradékot ad; az n-tagú összeg ezért osztható n-nel, maga a szorzat pedig n^2-tel, és ezt akartuk bizonyítani.

Imreh Csanád (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha x tetszőleges, 1-től különböző valós szám, n pedig pozitív egész, akkor

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n \cdot x^{n-1} = \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \tag{2}$$

Innen $x = 1991$, $n = 1989$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő tört értéke egész számok összege,

$$1 + 2 \cdot 1991 + 3 \cdot 1991^2 + \ldots + 1989 \cdot 1991^{1988},$$

és így természetesen egész.

A (2) azonosság bizonyítását legegyszerűbben az n-re vonatkozó teljes indukcióval végezhetjük. Ha $n = 1$, akkor a jobb oldal számlálója $(x-1)^2$, ha pedig $n > 1$, akkor az indukciós feltevés szerint kapott

$$(1 + 2x + \ldots + (n-1) \cdot x^{n-2}) + n \cdot x^{n-1} = \frac{(n-1)x^n - n \cdot x^{n-1} + 1}{(n-1)^2} + n \cdot x^{n-1}$$

egyenlőség jobb oldalát rendezve éppen (2) jobb oldalát kapjuk.

Megjegyzés. A differenciálási szabályok felhasználásával másképpen is bebizonyítható a (2) azonosság. Vegyük észre ugyanis, hogy a bal oldalon éppen az

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

deriváltja áll. A függvény ugyanakkor a mértani sorozat összegére vonatkozó formula szerint $x \neq 1$ esetben összegezhető:

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

és ebben az alakban deriválva éppen (2) jobb oldalát kapjuk.