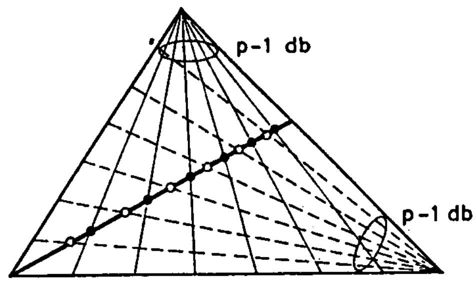
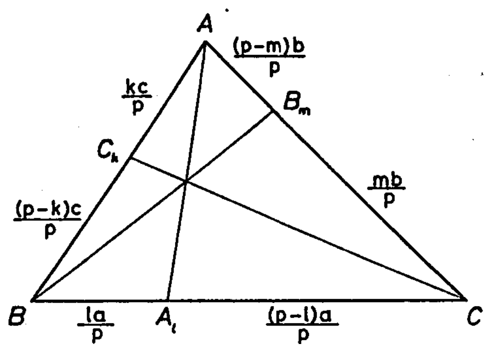
Megoldás. Minden szakasz metszi a másik két csúcsból kiinduló $2(p-1)$ darab szakaszt, vagyis minden szakaszon legfeljebb $2(p-1)$ darab metszéspont van *(1. ábra)*. Összesen $3(p-1)$ darab szakasz van, és minden metszéspont legalább két szakaszon van rajta, ezért az összes metszéspontok száma legfeljebb $\frac{2(p-1)\cdot 3(p-1)}{2}=3(p-1)^2$, és pontosan akkor ennyi, ha semelyik három szakasz nem megy át egy ponton.



1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy van három, egy ponton átmenő szakasz, mégpedig a *2. ábra* szerint az A csúcstól számított k-adik C_k, a B csúcstól számított l-edik A_l és a C csúcstól számított m-edik B_m osztópontot a szemközti csúccsal összekötő szakaszok. Ekkor Ceva tétele szerint (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, 1263. feladat):

$$\frac{AC_k}{C_kB}\cdot\frac{BA_l}{A_lC}\cdot\frac{CB_m}{B_mA}=1,$$

vagyis:

$$\frac{k}{p-k}\cdot\frac{l}{p-l}\cdot\frac{m}{p-m}=1.$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy:

$$2klm=p[p^2-p(k+l+m)+kl+lm+mk].$$

A bal oldalon álló $2,\ k,\ l,\ m$ számok mindegyike kisebb p-nél, ezért szorzatuk nem lehet a p prímszámmal osztható, tehát ez az egyenlőség nem állhat fenn. Ezért feltevésünk hibás, vagyis a szakaszok között nincs három egy ponton átmenő. A háromszög belsejében lévő metszéspontok száma így valóban $3(p-1)^2$.

Szüts Dávid (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján