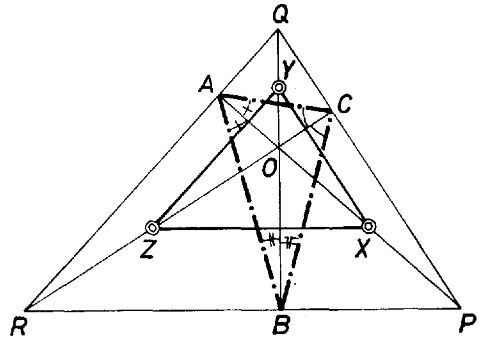
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a szerkesztendő háromszög csúcsait A, B, C-vel, beírt körének középpontját O-val, a hozzáírt körök középpontjait P, Q, R-rel, az OP, OQ, OR szakaszok felezőpontját pedig rendre X, Y, Z-vel.



Tudjuk, hogy a beírt kör középpontja a három belső szögfelező, a hozzáírt körök középpontja pedig két külső és egy belső szögfelező metszéspontja. Ezért az A, O, X, P; B, O, Y, Q és C, O, Z, R pontnégyesek az ABC háromszög egy-egy belső szögfelezőjén, az R, A, Q ; P, B, R és Q, C, P ponthármasok pedig az ABC háromszög egy-egy külső szögfelezőjén helyezkednek el. Egy szög külső és belső szögfelezői egymásra merőlegesek, így $AO \perp RQ$, $BP \perp PR$ és $CO \perp QP$. Mivel X, Y és Z felezőpontok, ezért ha a PQR háromszöget az O pontból felére kicsinyítjük, akkor az XYZ háromszöget kapjuk, tehát ennek a háromszögnek az oldalai párhuzamosak a PQR háromszög oldalaival. Az előzőekben belátott merőlegességekből következik, hogy $AOX \perp ZY$, $BOY \perp XZ$ és $COZ \perp YX$, vagyis O az XYZ háromszög magasságpontja.

Ezek alapján a szerkesztés menete a következő : Az adott XYZ háromszögnek megszerkesztjük a magasságpontját, ami éppen a szerkesztendő háromszög beírt körének O középpontja. Ebből a pontból az XYZ háromszöget kétszeresére nagyítva kapjuk a PQR háromszöget, amelynek csúcsai a szerkesztendő háromszög hozzáírt köreinek középpontjai, oldalai pedig az ABC háromszög külső szögfelezői. Végül O-ból merőlegeseket bocsátunk a PQR háromszög oldalegyeneseire (ezek a merőlegesek éppen az ABC háromszög belső szögfelezői), e merőlegesek talppontjai adják a szerkesztendő háromszög csúcsait.

Az így szerkesztett ABC háromszög a PQR háromszög talpponti háromszöge, ezért OA, OB és OC valóban belső szögfelezők (ennek bizonyítása megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* 1060. feladatában), a merőlegességek miatt pedig PR, RQ és QP külső szögfelezők, tehát P, Q és R a hozzáírt körök középpontjai. Vagyis az ABC háromszög beírt körének középpontját a hozzáírt körök középpontjával összekötő szakaszok felezőpontjai éppen az X, Y és Z pontok.

Ha az XYZ háromszög hegyesszögű, akkor pontosan 1 megoldás van (ez következik a szerkesztésből). Ha az X, Y, Z pontok egy egyenesbe esnek, vagy ha az XYZ háromszög nem hegyesszögű, akkor nincs megoldás. (Az XYZ háromszög minden szöge hegyesszög, mert pl.

$$ZXY\sphericalangle = BPC\sphericalangle = COQ\sphericalangle = OCB\sphericalangle + OBC\sphericalangle = \frac{ACB\sphericalangle + CBA\sphericalangle}{2} < \frac{ACB\sphericalangle + CBA\sphericalangle + BAC\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Közben felhasználtuk, hogy $PBOC$ húrnégyszög.)

Molnár-Sáska Gábor (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján