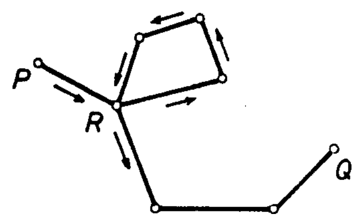
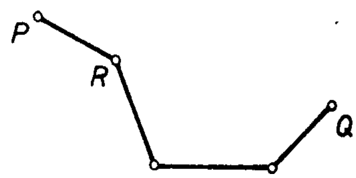
Megoldás. Írjuk először a feladatban szereplő konvex poliéder minden élére a $+1$ számot, és nevezzük a poliéder tetszőleges csúcsát $+1$-csúcsnak vagy -1-csúcsnak aszerint, hogy az oda befutó élekre írt számok szorzata $+1$ vagy -1. Egyelőre tehát a poliéder minden csúcsa $+1$-csúcs, és azt kell belátnunk, hogy az élek megszámozhatók a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy mindegyik csúcs -1-csúcs legyen. Nyilván elegendő megadnunk egy olyan algoritmust, amely – feltéve, hogy van legalább 2 darab $+1$ csúcs – pontosan 2-vel növeli a -1-csúcsok számát azáltal, hogy néhány élnél az ellentettjére változtatja a ráírt számot. Ha ui. ezt az algoritmust egymás után 50-szer alkalmazzuk, akkor lépésenként rendre $2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 100$ lesz a -1-csúcsok száma, tehát végül valamennyi csúcs -1-csúcs lesz.

Az algoritmus a következő. Tegyük fel, hogy konvex poliéderünknek van 2 darab $+1$-csúcsa, legyenek ezek P és Q. Ekkor – mivel konvex poliéderről van szó – P és Q összeköthető a poliéder éleiből álló T töröttvonallal. Ha T-n keresztül P-ből kiindulva elmegyünk Q-ba, akkor feltehetjük, hogy utunk során semelyik csúcsot sem érintettük kétszer, hiszen ilyen esetben T tartalmaz olyan zárt töröttvonalat, amelyet T-ből elhagyva egy kevesebb élből álló T' töröttvonalhoz jutunk, márpedig ez az eljárás csak véges sokszor ismételhető meg, hiszen a T-beli élek száma véges (*1. ábra*).

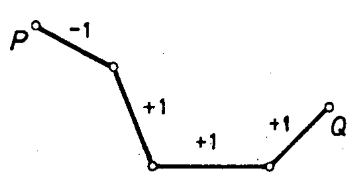


1.a) ábra: T, amely tartalmaz „kétszeres” R csúcsot

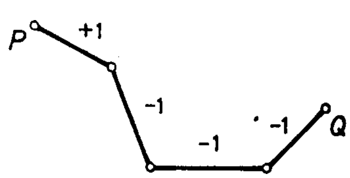


1.b) ábra: T', amely T-ből egy zárt töröttvonal elhagyásával keletkezett

Feltevésünk szerint tehát a T töröttvonalban a P és Q pontokhoz pontosan 1–1 él csatlakozik, a belső töréspontokhoz pedig pontosan 2. Változtassuk most az ellentettjére a T-beli élekre írt számokat (*2. ábra*).



2.a) ábra: T az algoritmus alkalmazása előtt (P és $Q + 1$ csúcsok)



2.b) ábra: T az algoritmus alkalmazása után (P és $Q - 1$ csúcsok)

Ekkor a P és a Q csúcsok esetében pontosan a (-1)-szeresére, a belső töréspontok esetében pedig a $(-1)^2$-szeresére változik az oda befutó élekre írt számok szorzata. Az algoritmus nyilván nem befolyásolja a T-hez nem tartozó csúcsokba futó élekre írt számokat, tehát valóban pontosan kettővel – P-vel és Q-val – növeli a -1-csúcsok számát.

Akkor is érvényes a meggondolás, ha a P-ből Q-ba vezető töröttvonal egyes belső töréspontjai már egy korábbi lépésben (-1)-csúccsá változtak.

Megjegyzés. Bizonyításunk közben a feladatbeli poliéder konvex voltából csak annyit használtunk fel, hogy a poliéder élhálózata összefüggő, azaz bármely két csúcsa összeköthető élekből álló töröttvonallal. Mivel ez az egyszerű poliéderekre is fennáll (lásd *Hajós György: Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Bp. 1987. 26–28. oldal), továbbá a csúcsok számának (100) helyett akármilyen más (4-nél nem kisebb) páros számot is tekinthettünk volna, ezért igaz a feladat következő általánosítása: Egy páros csúcsszámú egyszerű poliéder élei megszámozhatók a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy minden egyes csúcsra teljesül, hogy az oda befutó élekre írt számok szorzata -1.

Ha nem törekszünk arra, hogy minden egyes csúcs esetében -1 legyen az oda befutó élekre írt számok szorzata (tehát, hogy minden egyes csúcs -1-csúcs legyen), akkor tetszőleges egyszerű poliéderre kiterjeszthetjük az általánosítást: Ha egy egyszerű poliéder éleinek száma e, akkor bármely páros $0 \leq f \leq e$ számra megszámozhatók a poliéder élei a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy pontosan f legyen a -1-csúcsok száma (ebben az esetben az algoritmust $f/2$-ször kell egymás után alkalmaznunk a megoldáshoz hasonló kiindulási helyzet után).

Rögtön felvetődik a kérdés, hogy – az előző jelöléseket használva – tetszőleges egyszerű poliéder esetében van-e olyan páratlan $0 \leq f \leq e$ szám, amelyre megszámozhatók a poliéder élei a $+1$ és a -1 számokkal úgy, hogy pontosan f legyen a -1-csúcsok száma. Könnyen észrevehetjük, hogy nincs ilyen f szám, ha ui. lenne, akkor sorra összeszorozva az egyes csúcsoknál az oda befutó élekre írt számok szorzatát, egyrészt -1-et kellene kapnunk, hiszen páratlan számú -1-csúcsunk van (f db), másrészt $+1$-et, mert a szorzás során minden egyes élre írt szám pontosan kétszer szerepelt tényezőként, és $(+1)^2$-ek ill. $(-1)^2$-ek szorzata valóban $+1$. Az eddigiek alapján tehát egy e élű egyszerű poliéder esetében pontosan a páros $0 \leq f \leq e$ számokra létezik olyan számozás, amelynél pontosan f db -1-csúcs (ill. $e-f$ darab $+1$-csúcs) van.

Harcos Gergely (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., III. o. t.)