Megoldás. Legyen a keresett polinom fokszáma n. A b) feltételből következik, hogy a polinomnak n darab gyöke van. Ekkor a polinom felírható a következő alakban:

$$p(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

ahol a a $p(x)$ polinom főegyütthatója és x_1, x_2, ..., x_n a polinom gyökei. A d) feltétel szerint

$$-1 = p(0) = a(0 - x_1) \cdot (0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (0 - x_n) = (-1)^n \cdot a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$
$$\text{ezért} \quad (-1)^{n+1} = a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Mivel a jobb oldalon álló szorzat tényezői a) és c) szerint egészek, minden tényező abszolút értéke 1. Így a polinomnak csak $a+1$ és $a-1$ lehetnek a gyökei, ugyanúgy a is $+1$ vagy -1. Legyen a polinomnak a $(+1)$ l-szeres, a (-1) k-szoros gyöke, $k + l = n$. Ekkor

$$p(x) = a(x-1)^l \cdot (x+1)^k,$$

tehát e) szerint

$$128 = p(3) = a \cdot 2^l \cdot 4^k.$$

Mivel a $2^l \cdot 4^k$ szorzat pozitív, a értéke szükségképpen $+1$. Így

$$128 = 2^7 = 2^l \cdot 4^k = 2^{l+2k},$$

ahonnan

$$7 = l + 2k = (l + k) + k = n + k.$$

Az l és k természetes számok lévén,

$$7 \geqq 2k,$$

azaz $3 \geqq k$:

Tehát k legfeljebb 3 lehet, ezért n legalább 4. Így a legalacsonyabb fokszámú $p(x)$ polinom, amelyre mind az 5 feltétel teljesül, negyedfokú:

$$p(x) = (x-1)(x+1)^3 = x^4 + 2x^3 - 2x - 1.$$

Ujváry-Menyhárt Zoltán (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés: Látható, hogy annyi polinomra teljesülnek a feladat feltételei, ahány nem negatív egész megoldása van a

$$7 = l + 2k$$

egyenletnek. Ez három lehetőség: $l = 1$, $k = 3$; $l = 3$, $k = 2$ és $l = 5$, $k = 1$.

A megfelelő polinomok:

$$p_1(x) =(x-1)(x+1)^3;$$
$$p_2(x) =(x-1)^3(x+1)^2;$$
$$p_3(x) =(x-1)^5(x+1).$$