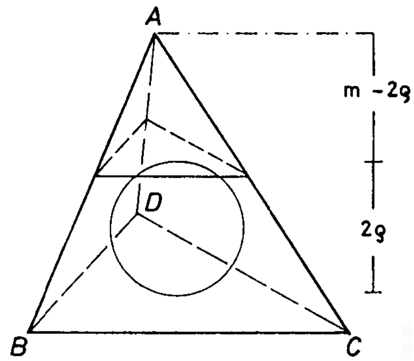
I. megoldás. Jelöljük a tetraéder csúcsait A B, C, D-vel, magasságvonalainak hosszát m_A, m_B, m_C, m_D-vel, a megfelelő lapok területét T_A, T_B, T_C, T_D-vel, a tetraéder térfogatát V-vel, beírt gömbjének sugarát ρ-val, a levágott kis tetraéderekbe írható gömbök sugarát pedig rendre ρ_A, ρ_B, ρ_C, ρ_D-vel.



1. ábra

A levágott kis tetraéderek hasonlóak az eredeti tetraéderhez (*1. ábra*), mivel a párhuzamos szelők tétele szerint a két tetraéder közös csúcsából történő megfelelő arányú középpontos nagyítás a kis tetraédert átviszi a nagyba. Ezért a tetraéderekben a megfelelő szakaszok aránya megegyezik. A kis tetraéderek közös csúcshoz tartozó magassága megegyezik a nagy tetraéder megfelelő magasságának és a beírt gömb átmérőjének különbségével. A magasságok és a beírt gömb sugarának arányát felírva:

$$\frac{\rho_A}{\rho}=\frac{m_A-2\rho}{m_A},\quad \frac{\rho_B}{\rho}=\frac{m_B-2\rho}{m_B},\quad \frac{\rho_C}{\rho}=\frac{m_C-2\rho}{m_C},\quad \frac{\rho_D}{\rho}=\frac{m_D-2\rho}{m_D}.$$

Ezeket rendezve és összeadva kapjuk, hogy:

(1) $$\rho_A+\rho_B+\rho_C+\rho_D=4\rho-2\rho^2\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}\right).$$

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogatára fennáll, hogy

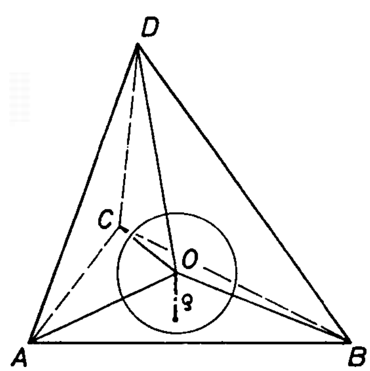
$$3V=T_A\cdot m_A=T_B\cdot m_B=T_C\cdot m_C=T_D\cdot m_D.$$

Ebből

$$\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}=\frac{T_A+T_B+T_C+T_D}{3V}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

(2) $$\rho_A+\rho_B+\rho_C+\rho_D=4\rho-2\rho\cdot\frac{\rho(T_A+T_B+T_C+T_D)}{3V}.$$



2. ábra

Ha O a tetraéder beírt gömbjének a középpontja, akkor az $OABC$ tetraéder O-hoz tartozó magassága ρ (*2. ábra*), ezért a térfogata $\frac{T_A}{3}\rho$. A négy darab ilyen típusú egyenlőséget összeadva kapjuk, hogy $3V=\rho T_A+\rho T_B+\rho T_C+\rho T_D$. Ezt (2)-be helyettesítve:

$$\rho_A+\rho_B+\rho_C+\rho_D=4\rho-2\rho=2\rho.$$

A feladatban szereplő értékekkel

$$\rho = \frac{1}{2}(9+12+36+39) = 48\,\text{egység}.$$

Meg kell még vizsgálnunk, vajon létezik-e olyan tetraéder, amelynél a levágott kis tetraéderekbe írható gömbök sugarai $9, 12, 36,$ és 39 egység. Megmutatható, hogy az a tetraéder, amelynek van három, egymásra páronként merőleges (közös csúcsból induló) éle, és ezek hossza rendre 128, 384 és 512 egység, éppen ilyen.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá jelöljük az eredeti tetraéderhez hozzáírt gömbök sugarait rendre ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d-vel.

Ismert, (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I., 2006/a feladat), hogy ekkor:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_d}. \tag{3}$$

A levágott tetraéderek hozzáírt gömbje éppen az eredeti tetraéder beírt gömbje, ezért az I. megoldásban belátott hasonlóság miatt:

$$\frac{\rho_A}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_a}, \quad \frac{\rho_B}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_b}, \quad \frac{\rho_C}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \frac{\rho_D}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_d}.$$

Ezekből ρ_a, ρ_b, ρ_c és ρ_d-t kifejezve, majd (3)-ba helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\frac{2}{\rho} = \frac{\rho_A + \rho_B + \rho_C + \rho_D}{\rho^2},$$

azaz

$$\rho = \frac{\rho_A + \rho_B + \rho_C + \rho_D}{2}.$$

Esetünkben tehát a beírt gömb sugara $\dfrac{9+12+36+39}{2} = 48$ egység.

Kassai Lóránt (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján