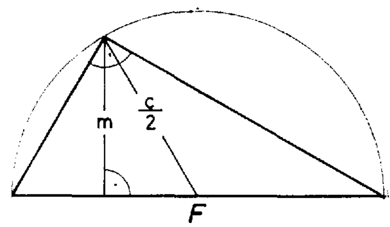
Először egy, a derékszögű háromszögekre vonatkozó egyenlőtlenséget bizonyítunk be:
(*) Ha a és b egy derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogó, akkor

$$a+b<\frac{3}{2}c.$$



1. ábra

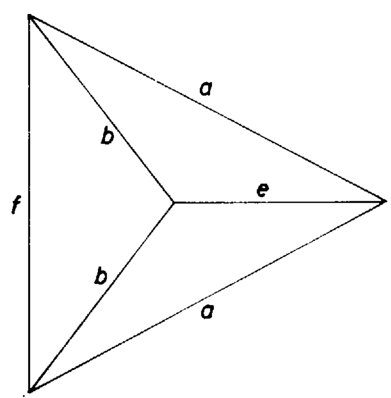
Bizonyítás. Jelöljük m-mel a háromszög átfogóhoz tartozó magasságát. Ekkor $a \cdot b = m \cdot c$, hiszen mindkettő megegyezik a háromszög területének kétszeresével. Pitagorasz tétele szerint $a^2+b^2=c^2$ tehát, $a^2+b^2<c^2+m^2$. Vagyis

$$a^2+b^2+2ab<c^2+m^2+2mc$$

azaz

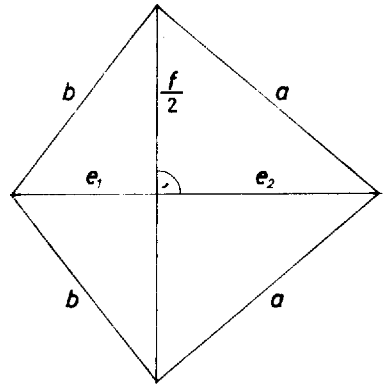
$$(a+b)^2<(c+m)^2,$$

amiből – pozitív számokról lévén szó – következik, hogy $a+b<c+m$. Másrészt tudjuk, hogy $m<\frac{1}{2}c$ (1. ábra), tehát $a+b<c+\frac{1}{2}c$; ezzel a (*) állítást beláttuk.



2. ábra

Térjünk vissza eredeti feladatunkra. Ha a deltoid konkáv, akkor állításunk triviális (a 2. ábra jelöléseivel: $e<a$, $f<2b<a+b$, tehát $e+f<2a+b$). Ha a deltoid konvex, akkor jelöljük oldalainak hosszát a-val és b-vel ($a \geqq b$), átlóit e-vel és f-fel úgy, hogy e felezi f-et, f pedig e_1 és e_2 hosszúságú részekre osztja e-t (3. ábra).



3. ábra

Az átlók a deltoidot négy derékszögű háromszögre bontják. A (*) állítást ezen háromszögekre alkalmazva kapjuk, hogy

$$e_1 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}b,$$

és

$$e_2 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}a.$$

Ezeket összeadva és felhasználva, hogy $a \geqq b$, kapjuk hogy

$$e + f = e_1 + \frac{f}{2} + e_2 + \frac{f}{2} < \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b \leqq 2a + b$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Lente Gábor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A (*) állítás a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség felhasználásával egyszerűbben is bizonyítható:

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot c}{2},$$

vagyis $a + b \leqq \sqrt{2}c$ is igaz.