**I. megoldás**. Ha van olyan 1990 nevezőjű tört, melynek tizedestört alakjában négy szomszédos egyforma tizedesjegy van, akkor olyan tört is létezik, amelyben az egyforma tizedesjegyek közvetlenül a tizedesvessző után állnak; ehhez elég, ha a számlálót a megfelelő 10-hatvánnyal megszorozzuk. Az is föltehető, hogy a számláló kisebb 1990-nél, hiszen a tizedesvessző utáni jegyek csak a számlálónak az 1990-nel való osztási maradékától függenek.

Legyen most a négy egyforma jegyből á11ó csoport „$dddd$". Az előbbiek szerint létezik olyan pozitív egész $A$, melyre

$$\frac{A}{1990} = 0,dddd\ldots \tag{1}$$

Ha most a négyjegyű pozitív egész $\overline{dddd}$ számot $D$-vel jelöljük, akkor (1) pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{D+1}{10^4} > \frac{A}{1990} \geqq \frac{D}{10^4}, \tag{2}$$

azaz 1990-nel végigszorozva:

$$0,199(D+1) \ > \ A \ \geqq \ 0,199D. \tag{3}$$

Azt kaptuk, hogy pontosan akkor létezik a szóban forgó tulajdonságú tört, ha a $[0,199D;\ 0,199(D+1))$ intervallum tartalmaz egész számot; ez lenne a tört számlálója.

A tíz lehetséges esetet végignézve (ti. $0 \leqq d \leqq 9$) tapasztalhatjuk, hogy az adott típusú intervallumok belsejében nincsen egész szám, így nem létezik a keresett tört, valóban hiba történt a számolásban.

Stőhr Lóránt (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., II. o. t.)

**II. megoldás**. Az I. megoldás föltevéseit és jelöléseit használva tegyük fel, hogy létezik olyan $1 \leqq A < 1990$ egész, amelyre teljesül (2). Szorozzuk meg (2)-t $9 \cdot 1990$-nel, és használjuk fel, hogy $9D = 9 \cdot 1111 \cdot d = (10^4-1)d$. Igy azt kapjuk, hogy

$$\frac{9 \cdot 1990 + d \cdot 1990(10^4-1)}{10^4} > 9A \geqq \frac{d \cdot 1990(10^4-1)}{10^4},$$

azaz minden tagból $d \cdot 1990$-et levonva:

$$\frac{(9-d) \cdot 1990}{10^4} \ > \ 9\,A - 1990d \geqq -\frac{1990d}{10^4}. \tag{4}$$

Mivel $(9-d) \cdot 1990$ is, $d \cdot 1990$ is kisebb, mint $2 \cdot 10^4$ (hiszen $d$ számjegy), így (4)-b01 az következik, hogy

$$2 > 9A - 1990d > -2, \tag{5}$$

azaz $9A - 1990d$ szóba jövő értékei: $-1$, 0 és 1.

Mindhárom esetben egy-egy kétismeretlenes diofantikus egyenletet kapunk; olyan megoldást keresünk, melyre $1 \leqq A < 1990$ és $0 \leqq d < 10$.

A $9A - 1990d = -1$ egyenlet ilyen megoldása $A = 221$, $d = 1$;

a $9A - 1990d = 0$ egyenletnek nincs a fenti típusú megoldása, hiszen $(9, 1990) = 1$,

így az egyenletből $1990|A$ következik; végül a

$9A - 1990d = 1$ egyenlet megoldása $A = 1769$, $d = 8$.

Könnyen látható, hogy a talált megoldások egyikére sem teljesül (2). Ne feledjük, hogy csupán a durvább (5) alapján kaptuk őket! Így valóban nem létezik a mondott tulajdonságú tört.

*Megjegyzések.* 1. A feladat szövegben lényeges, hogy az egyforma jegyeket a tizedesvessző után követeljük meg. Például a

$$88 + \frac{1769}{1990} = 88,8889\ldots$$

szám tizedeltört alakjában található 5 szomszédos egyforma számjegy.

2. Tetszőleges négy jegyből álló $D$ jegycsoport pontosan akkor fordul elő egy 1990 nevezőjű tört tizedesjegyei között, ha valamilyen $A$-val teljesül (3). Látható, hogy a $10^4$ darab négyjegyű csoportból pontosan 1990 található meg valamely 1990 nevezőjű tört tizedesjegyei között. Ugyanez a helyzet az öt- vagy annál több jegyből álló csoportok esetén is. Ami a 3-jegyű csoportokat illeti, ezek közül viszont már mindegyik előfordul, hiszen ekkor a (3)-nak megfelelő

$$1,99(D+1) \ > \ A \geqq 1,99D \tag{3'}$$

feltétel minden $D$-re teljesül valamilyen $A$ egész számmal. A kapott intervallum hossza ugyanis 1-nél nagyobb $(1,99)$, így az mindig tartalmaz egész számot – általában kettőt is.