

$$(1) \quad x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel és adjunk mindkét oldalhoz 1-et. Így a bal oldal teljes négyzet. A jobb oldalon is kíséreljünk meg teljes négyzetté alakítani. Így a

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y) = (2y^2 + y)^2 + (3y^2 + 4y + 1)$$

egyenlethez jutunk. Ha  $y$  egész szám és nem egyenlő a  $-1, 0, 1, 2$  értékek egyikével sem, akkor az egyenlet jobb oldalának két alakjából

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2,$$

így  $(2x + 1)^2$  két szomszédos négyzetszám közé esik, tehát nem lehet egy egész szám négyzete.

Ha  $y = -1$  vagy  $0$ , akkor (1)-ből  $x^2 + x = 0$ , azaz  $x = 0$ , vagy  $x = -1$ .

Ha  $y = 1$ , akkor (1)-ből  $x^2 + x = 4$ , ilyen  $x$  egész nem létezik.

Ha  $y = 2$ , akkor (1)-ből  $x^2 + x = 30$ , így  $x = 5$ , vagy  $x = -6$ .

Az (1) egyenletnek tehát hat megoldása van az egész számok körében, ezek:  $(-1; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(5; 2)$ ,  $(-6; 2)$

*Megjegyzés.* Úgy is eljuthatunk a megoldáshoz, ha az (1) egyenletet  $x$ -ben másodfokúnak tekintve az egyenlet diszkriminánsát vizsgáljuk.