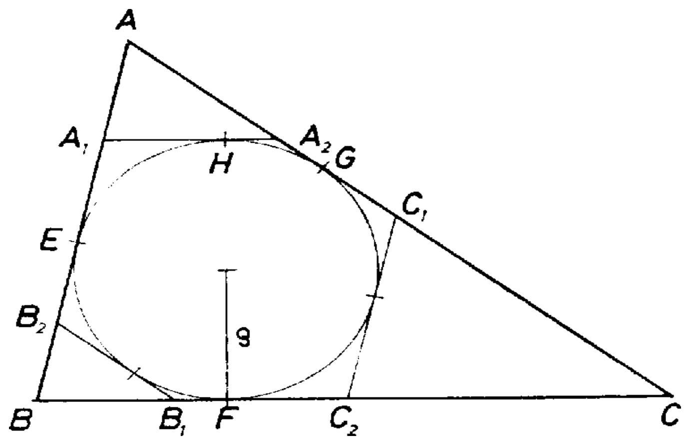
I. megoldás. Legyenek az ABC háromszög beírt körének az oldalakon lévő érintési pontjai E, F és G, a levágott kis háromszögek AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2; az A_1A_2 és a beírt kör érintési pontja pedig H (1. ábra). Jelöljük a kis háromszögek kerületét rendre k_A, k_B, k_C -vel, az ABC háromszög kerületét pedig k-val.



1. ábra

Mivel egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért $k_A = AA_1 + AA_2 + A_1H + A_2H = AA_1 + A_1E + AA_2 + A_2G = AE + AG$. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy $k_B = BE + BF$ és $k_C = CG + CF$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $k_A + k_B + k_C = k$. Másrészt az oldalak párhuzamossága miatt a levágott kis háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz, ezért a háromszögek beírt körének és kerületének aránya mind a négy háromszög esetén ugyanaz a t valós szám:

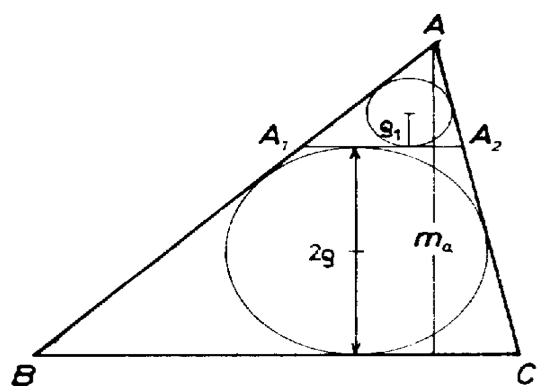
$$\frac{\varrho}{k} = \frac{\varrho_1}{k_A} = \frac{\varrho_2}{k_B} = \frac{\varrho_3}{k_C} = t.$$

Ezeket felhasználva:

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = tk_A + tk_B + tk_C = t(k_A + k_B + k_C) = tk = \varrho;$$

ami éppen a bizonyítandó összefüggés.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá jelöljük az ABC háromszög magasságait rendre m_a, m_b, m_c-vel. Az AA_1A_2 háromszög A-hoz tartozó magassága ekkor $m_a - 2\varrho$ (lásd a 2. ábrát).



2. ábra

Az AA_1A_2 háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, ezért:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{m_a - 2\varrho}{m_a}.$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho} = \frac{m_b - 2\varrho}{m_b} \quad \text{és} \quad \frac{\varrho_3}{\varrho} = \frac{m_c - 2\varrho}{m_c}.$$

Ezekből:

(1) $$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho\left(3 - \frac{2\varrho}{m_a} - \frac{2\varrho}{m_b} - \frac{2\varrho}{m_c}\right).$$

Tehát elegendő megmutatnunk, hogy $\frac{2\varrho}{m_a}+\frac{2\varrho}{m_b}+\frac{2\varrho}{m_c}=2$. Ha az ABC háromszög területét T jelöli, akkor az ismert területképletek alapján:

$$2T=k\varrho=a\cdot m_a=b\cdot m_b=c\cdot m_c,$$

vagyis:

$$\frac{\varrho}{m_a}+\frac{\varrho}{m_b}+\frac{\varrho}{m_c}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=\frac{a+b+c}{k}=1.$$

Tehát (1)ből következik, hogy $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3=\varrho(3-2)=\varrho$.

Olaszi Zsolt (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján