I. megoldás. Írjuk számainkat egy 13 oldalú konvex sokszög csúcsaira, rajzoljuk meg a sokszög $13 \cdot 12 = 78$ átlóját és oldalát, és közülük színezzük pirosra mindazokat, amelyekről tudjuk, hogy a végpontjaira írt számok összege egész. Ábránkon a feltétel szerint így 11 darab nem piros szakasz van.

Szemeljünk ki ezután a számok közül kettőt, jelölje őket – és a sokszög megfelelő csúcsait is – A és B, a további 11 darab számot és a megfelelő csúcsokat C_1, C_2, $\ldots$, C_{11}.

Megadunk 12 olyan, az A-ból a B-be – a megrajzolt élek mentén – haladó útvonalat, hogy semelyik kettőnek nincs közös szakasza. Ezek az AB, AC_1C_2B AC_2C_3B, $\ldots$, $AC_{10}C_{11}B$, végül az $AC_{11}C_1B$. Mivel összesen 11 nem piros él van, a fenti útvonalak között van olyan, amelynek minden egyes szakasza piros. Ha ez maga az AB, akkor készen vagyunk, $A+B$ egész. Ha pedig az $AC_iC_{i+1}B$ (ahol $C_{12}=C_1$) útvonal szakaszai pirosak, akkor $A+B=(A+C_i)-(C_i+C_{i+1})+(C_{i+1}+B)$ miatt ismét azt kapjuk, hogy a kiszemelt számok összege, $A+B$ egész. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Hasonlóan igazolható, hogy ha $n \geqq 5$ és n adott valós számból készíthető $\binom{n}{2}$ darab összeg közül $\binom{n-1}{2}+1$ darabról tudjuk, hogy egész, akkor ebből következik, hogy valamennyi kéttagú összeg egész. Az, hogy maguk a számok is egészek, természetesen nem következik a feltételből, amelyik nyilván teljesül, ha például valamennyi megadott szám értéke $1/2$.

2. A feladat állítása nem igaz, ha $n=3$ vagy 4, ahogy a $\{8,1;\ 0,1;\ 0,9\}$, illetve a $\{8,1;\ 0,1;\ 10,9;\ 0,9\}$, példák mutatják. A bizonyításból is kiolvasható, hogy a C-típusú pontokból legalább háromra van szükség.

3. A feladat állítása nyilván éles. Ha csak 66 – illetve általában $n-1 choose 2$ – összegről tudjuk, hogy egész, akkor ez lehetséges úgy, hogy az n darab szám közül $n-1$ egész, egy pedig nem az.

4. A fenti bizonyítás során lényegében arra volt szükségünk, hogy ha $n \geqq 5$ és egy n pontú gráfnak $\binom{n-1}{2}+1$ éle van, akkor a gráf bármely két pontja között vezet páratlan hosszú út.

II. megoldás. Néhány gráfelméleti alapfogalom és a rájuk vonatkozó elemi ismeretek birtokában másik megoldás is készíthető. Legyen $n \geqq 5$, és adott n darab valós szám, melyekről tudjuk, hogy a belőlük készíthető kéttagú összegek közül $\binom{n-1}{2}+1$ egész. Készítsük el az első megoldás G gráfját – a piros élekből. Ismeretes, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van, másfelől, hogy bármely G gráf és a komplementere közül legalább az egyik összefüggő. Mivel most G komplementerének $\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}-1=n-2$ éle van, így nem lehet összefüggő; tehát a G gráf az.

Ez azt jelenti, hogy a G gráf bármely két A, B csúcsa között vezet út. Ha ennek a hossza páratlan, akkor az első megoldás szerint az út kezdő és végpontjához írt számok összege egész, ha pedig páros, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $A-B$ egész szám.

Helyettesítsük most mindegyik számot a törtrészével, ez az összegek egész, vagy nem egész voltát nem befolyásolja. Szemeljünk ki egy tetszőleges csúcsot, legyen a ráírt szám α. Ekkor $0 \leqq \alpha < 1$. Ha $\alpha = 0$, akkor persze a többi csúcsokon is egész számok állnak, ha pedig $\alpha > 0$, akkor minden más csúcson vagy α, vagy pedig $1-\alpha$ áll.

Megmutatjuk, hogy ekkor $\alpha = 1-\alpha$, azaz mindegyik számnak $1/2$ a törtrésze. Tegyük fel, hogy ez nem így van, és osszuk két csoportba a G csúcsait aszerint, hogy α vagy $1-\alpha$ van-e rájuk írva: Ha az első csoportba k csúcs került, akkor $1 \leqq k < n$. ($k=n$ nem lehetséges, mivel akkor egyetlen éle sem volna a gráfnak.) Feltevésünk szerint $a \neq 1-\alpha$, így az egyes csoportokon belül nem haladhat éle a G-nek, hisz máskülönben $2\alpha = 1$, vagy $2(1-\alpha)=1$ miatt $\alpha = 1-\alpha = \frac{1}{2}$. Így viszont a gráfnak legfeljebb $k(n-k)$ darab éle lehet.

Ez az érték azonban kisebb a G élei számánál, ugyanis $n \geqq 5$ esetén $k(n-k) \leqq \frac{n^2}{4} < \binom{n-1}{2}+1$.