I. megoldás. Jelölje az x, $\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{x}$ mennyiségek legkisebbikét $m(x,y)$. Ekkor

$$0<m(x,y)\leqq x; \tag{1}$$

$$0<m(x,y)\leqq \frac{1}{y}; \tag{2}$$

$$0<m(x,y)\leqq y+\frac{1}{x}. \tag{3}$$

(1)-böl és (2) ből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{m(x,y)},\qquad \text{illetve}\qquad y\leqq\frac{1}{m(x,y)},$$

ezért

$$y+\frac{1}{x}\leqq\frac{2}{m(x,y)}.$$

Ezt (3)-mal egybevetve

$$m(x,y)\leqq\frac{2}{m(x,y)},$$

ahonnan $m(x,y)>0$ miatt $m(x,y)\leqq\sqrt{2}$ adódik. Az x; $\frac{1}{y}$; $y+\frac{1}{x}$ értékek legkisebbike tehát nem lehet $\sqrt{2}$-nél nagyobb. Egyenlőség lehetséges, amennyiben (1), (2), (3)-ban egyidejűleg egyenlőség áll, azaz $x=\frac{1}{y}=\sqrt{2}$. Ekkor $y+\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ és így a keresett érték a $\sqrt{2}$.

Dombi Gergely (Pécs, JPTE I. sz. Gyak. Ált. Isk., 7. o. t.)

II. megoldás. Az $u=\frac{1}{y}$ jelöléssel az $\left(x,u,\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)$ mennyiségek minimumát keressük. Jelöljük általában az (α_1, α_2, …, α_n) számok minimumát $m(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n)$-nel.

Ekkor nyilván

$$m\left(x,u,\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)=m\left(m(x,u);\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Két pozitív szám kisebbike nem lehet nagyobb, mint az ismert módokon képezett középértékeik. Vegyük először a harmonikus közepüket:

$$m(x,u)\leqq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{u}},\qquad\text{tehát}$$

$$m\left(x,u,\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)\leqq m\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{u}},\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Ezután azt használjuk ki, hogy két pozitív szám minimuma nem nagyobb a mértani közepüknél; így

$$m\left(x,u,\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)\leqq m\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{u}},\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)\leqq\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{u}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)}=\sqrt{2}.$$

Tehát

$$m\left(x,u,\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\right)\leqq\sqrt{2},$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x=u=\frac{1}{x}+\frac{1}{u}$, azaz $x=u=\sqrt{2}$.

Megjegyzés. Mindkét megoldás gondolatmenetével igazolható, hogy ha a x_1, x_2, …, x_n tetszőleges pozitív számok, akkor az x_1, x_2, …, x_n, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$ számok minimuma nem lehet nagyobb, mint $\sqrt{n}$ és pontosan akkor ennyi, ha $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{n}$.

Hasonlóan igazolható, hogy a pozitív x_1, x_2, …, x_n, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$ számok legnagyobbika legalább $\sqrt{n}$.