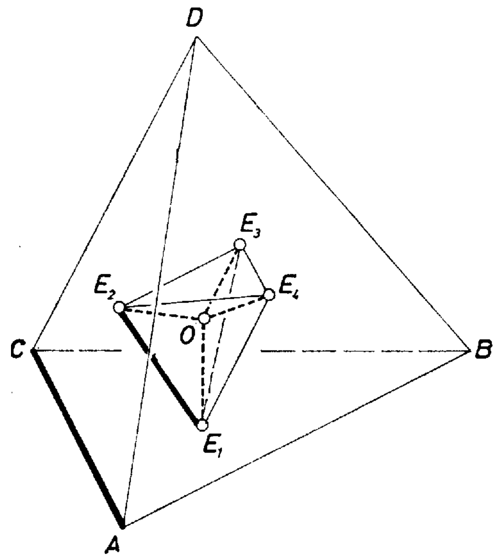
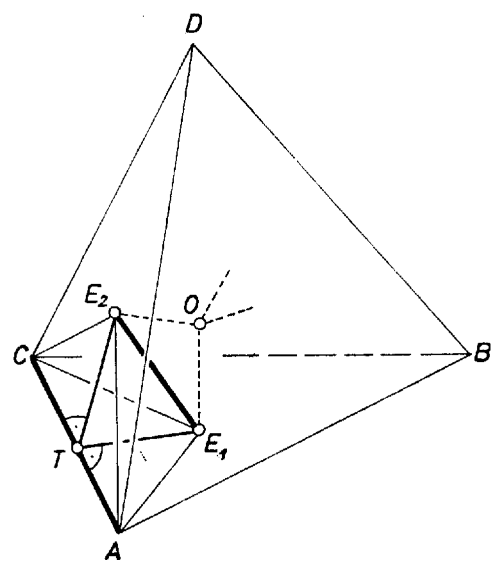
I. megoldás. Jelöljük az $ABCD$ tetraéder beírt gömbjének középpontját O-val, a beírt gömbnek a lapon levő érintési pontjait pedig E_1, E_2, E_3, E_4-gyel (1. ábra). Tekintsük az érintési pontok által meghatározott tetraéder egyik élét. Ennek két végpontja az eredeti tetraéder két lapjára illeszkedik. Megmutatjuk, hogy ennek a két lapnak a közös éle merőleges a kis tetraéder kiválasztott élére. (Az 1. ábra jelölései szerint tehát pl. E_1E_2 merőleges AC-re.)



1. ábra

Tudjuk, hogy egy gömb érintősíkja merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Ezért OE_1 merőleges az ABC síkra. Ha viszont egy egyenes merőleges egy síkra, akkor annak minden egyenesére is merőleges, tehát $OE_1 \perp AC$. Hasonlóan OE_2 merőleges az ADC síkra, tehát $OE_2 \perp AC$. Vagyis AC az OE_1E_2 sík két nem párhuzamos egyenesére is merőleges, amiből következik, hogy AC merőleges e sík minden egyenesére, tehát az E_1E_2 egyenesre is.

II. megoldás Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Ismét azt mutatjuk meg, hogy AC merőleges E_1E_2-re.



2. ábra

Az AE_1 és az AE_2 szakaszok egyenlőek, mert mindkettő az A pontból a beírt gömbhöz húzott érintőszakasz. Ugyanezért $CE_1 = CE_2$. Vagyis az ACE_1 és az ACE_2 háromszögek megfelelő oldalai egyenlőek, tehát a két háromszög egybevágó. Mivel a két háromszögben az A és a C csúcs közös, ezért az AC oldalhoz tartozó magasságok talpponja is közös. Jelöljük ezt a pontot T-vel (2. ábra). Ekkor $AC \perp E_1T$ és $AC \perp E_2T$, tehát az AC egyenes merőleges az E_1E_2T sík két nem párhuzamos egyenesére, ezért merőleges e sík bármely egyenesére, így E_1E_2-re is.

Csetneki Csilla (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján.