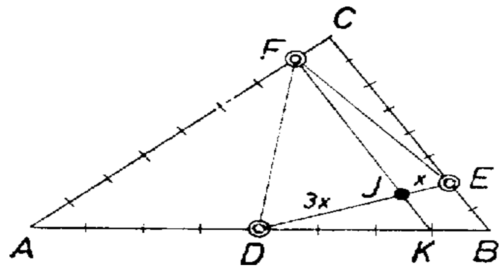
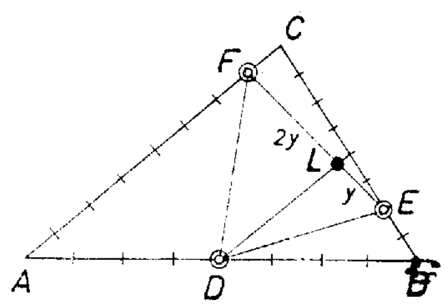
I. megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük az AB oldal felezőpontját D-vel, a BC oldal B-hez közelebbi negyedelőpontját E-vel, a CA oldal C-hez közelebbi nyolcadoló pontját pedig F-fel. Rajzoljunk F-en át párhuzamost a BC oldallal. Messe ez a DE szakaszt J-ben, az AB oldalt pedig K-ban (1. ábra).

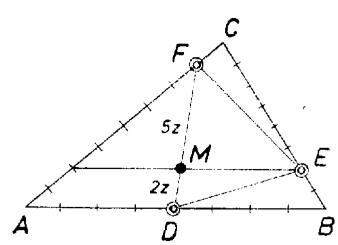


1. ábra

Mivel $CB \parallel FK$, ezért a párhuzamos szelők tétele szerint $AK : KB = AF : FC = 7 : 1$, tehát K nyolcadolópontja az AB oldalnak, D ugyanennek az oldalnak a felezőpontja, ezért $DK : KB = 3 : 1$. A párhuzamos szelők tételét az EDB szögre alkalmazva kapjuk, hogy $DJ : JE = DK : KB = 3 : 1$. Tehát az F ponton át a BC oldallal húzott párhuzamos a DE szakaszt 3:1 arányban osztja. Teljesen hasonló módon láthatjuk be, hogy a D ponton át AC-vel húzott párhuzamos az EF szakaszt 1:2 arányban (2. ábra), az E ponton át AB-vel húzott párhuzamos az FD szakaszt pedig 5:2 arányban osztja (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Ezek alapján a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el:

A DE, EF és FD szakaszokon megszerkesztjük azokat a J, L, M pontokat, melyekre $DJ : JE = 3 : 1$, $EL : LF = 1 : 2$ és $FM : MD = 5 : 2$. Ezután FJ-vel E-n át, DL-lel F-en át, EM-mel pedig D-n át párhuzamost húzunk. Ez a három párhuzamos a szerkesztendő háromszög három oldalegyenese.

Könnyen belátható – a párhuzamos szelők tételének többszöri alkalmazásával –, hogy az így szerkesztett háromszögben a D, E, F pontok valóban felező-, negyedelő-, illetve nyolcadoló pontok. Ha a D, E, F pontok egy egyenesbe esnek, akkor a feladatnak nincs megoldása, minden más esetben egy megoldás van.

Illés Mariann (Tata, Eötvös J. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot a következő, általánosabb formában oldjuk meg:

Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adottak oldalegyenesein azok a D, E, F pontok, melyekre $AD : DB = 1 : \alpha$, $BE : EC = 1 : \beta$ és $CF : FA = 1 : \gamma$, ahol α, β és γ adott racionális számok.

Indítsunk a sík egy tetszőleges O pontjából helyvektorokat a szereplő pontokhoz, és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel. Ekkor az arányosan osztó pont helyvektorára vonatkozó ismert szabály alapján felírhatjuk, hogy:

$$\mathbf{d} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1+\alpha},$$
$$\mathbf{e} = \frac{\beta\mathbf{b} + \mathbf{c}}{1+\beta},$$
$$\mathbf{f} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \mathbf{a}}{1+\gamma}.$$

Ezt az egyenletrendszert $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-re megoldva kapjuk, hogy:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{1+\alpha\beta\gamma}\big(\beta\gamma(1+\alpha)\mathbf{d} - \gamma(1+\beta)\mathbf{e} + (1+\gamma)\mathbf{f}\big),$$
$$\mathbf{b} = \frac{1}{1+\alpha\beta\gamma}\big((1+\alpha)\mathbf{d} + \alpha\gamma(1+\beta)\mathbf{e} - \alpha(1+\gamma)\mathbf{f}\big),$$
$$\mathbf{c} = \frac{1}{1+\alpha\beta\gamma}\big(-\beta(1+\alpha)\mathbf{d} + (1+\beta)\mathbf{e} + \alpha\beta(1+\gamma)\mathbf{f}\big).$$

A szerkesztést úgy végezzük, hogy a $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ vektorok ismeretében megszerkesztjük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat, s ezeknek a végpontjai adják a háromszög csúcspontjait. (Eredeti feladatunkban $\alpha = 1$, $\beta = 3$ és $\gamma = 7$.)

A diszkusszió az általános esetben valamivel bonyolultabb. Ha a D, E, F pontok nincsenek egy egyenesen és $\alpha\beta\gamma \neq -1$, akkor egy megoldás van. Ha a D, E, F pontok egy egyenesen vannak és $\alpha\beta\gamma = -1$, akkor végtelen sok megoldás van, más esetben pedig nincs megoldás. (Ennek bizonyítását az érdeklődő olvasó Menelaosz tételének felhasználásával végezheti el.)

Megjegyzés: Természetesen az első megoldás módszerével is megoldható az általános feladat, ennek végiggondolását is az olvasóra bízzuk.