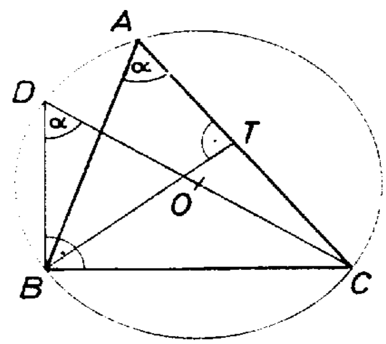
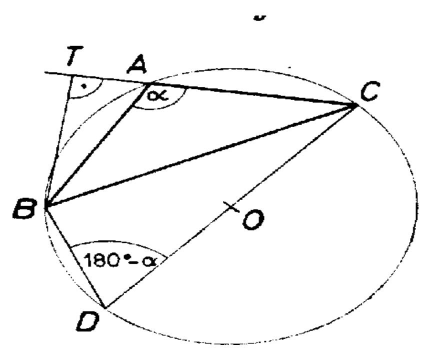
Először bebizonyítunk egy, a háromszög köré írt kör sugarára vonatkozó összefüggést:

(∗) *Tetszőleges háromszög köré írt körének sugarát megkaphatjuk úgy, hogy a háromszög két oldalának szorzatát elosztjuk a harmadik oldalhoz tartozó magasság kétszeresével.*

Jelöljük az ABC háromszög szögeit és oldalait a szokásos módon. Legyen a köré írt kör középpontja O, sugara R, az OC egyenes és a köré írt kör másik metszéspontja D, a B csúcshoz tartozó magasság talppontja T, a magasságszakasz hossza pedig m_b. Azt kell megmutatnunk, hogy $R=\dfrac{ac}{2m_b}$. Ha $\alpha=90^\circ$, akkor $c=m_b$, az állítás nyilvánvaló. Ha $\alpha\neq 90^\circ$, akkor a BDC és a TAB háromszögek hasonlóak, mert $DBC\sphericalangle=BTA\sphericalangle=90^\circ$, valamint a kerületi szögek tétele miatt $BDC\sphericalangle=BAT\sphericalangle$. Ha $\alpha<90^\circ$, akkor mindkét szög a körülírt kör BC ívéhez tartozó kerületi szög (1/a ábra), ha pedig $\alpha>90^\circ$, akkor mindkét szög 180°-ra egészíti ki α-t (1/b ábra).



1/a ábra

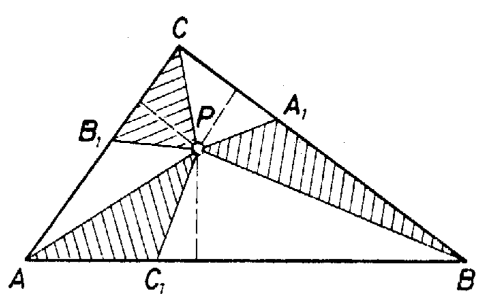


1/b ábra

Ezért a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya is megegyezik, vagyis $\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{BT}{BA}$, azaz $\dfrac{a}{2R}=\dfrac{m_b}{c}$; rendezve:

$$R=\frac{a\cdot c}{2m_b}.$$

Térjünk vissza eredeti feladatunkra. Jelöljük a P pontnak a BC, CA illetve az AB oldalaktól való távolságát rendre d_a, d_b, d_c-vel.



Alkalmazzuk a (∗) állítást az AC_1P háromszögre. E háromszög AC_1 oldalához tartozó magassága d_c, tehát a háromszög köré írható kör R_1 sugarára: $R_1=\dfrac{AP\cdot PC_1}{2d_c}$. Ugyanez a d_c magasság megtalálható a C_1BP háromszögben is, így e háromszög köré írható kör R_2 sugarára: $R_2 = \dfrac{PC_1 \cdot BP}{2d_c}$. Ugyanígy kifejezve a többi szereplő háromszög köré írt kör sugarát, bizonyítandó állításunk a következő alakot ölti:

$$\frac{AP \cdot PC_1}{2d_c} \cdot \frac{BP \cdot PA_1}{2d_a} \cdot \frac{CP \cdot PB_1}{2d_b} = \\ = \frac{PC_1 \cdot BP}{2d_c} \cdot \frac{PA_1 \cdot CP}{2d_a} \cdot \frac{PB_1 \cdot AP}{2d_b}.$$

Ez viszont nyilvánvaló azonosság.

Megjegyzések. **1.** Teljesen hasonló módon látható be a feladat következő általánosítása: Legyen P az $A_1A_2\ldots A_n$ konvex n-szög tetszőleges belső pontja, B_1, B_2, …, B_n pedig rendre az A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 oldalak egy belső pontja. Ekkor az A_1PB_1, A_2PB_2, …, A_nPB_n háromszögek köré írt körök sugarainak szorzata megegyezik a B_1PA_2, B_2PA_3, …, B_nPA_1 háromszögek köré írt körök sugarainak szorzatával.

Kassai Lóránt (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

2. A $(*)$ állítást sokan a szinusztétel segítségével bizonyították a következőképpen: A tétel szerint $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. A törtet bővítve: $R = \dfrac{abc}{2bc\sin\alpha} = \dfrac{abc}{4T} =$
$= \dfrac{abc}{2b \cdot m_b} = \dfrac{ac}{2m_b}$ (T a háromszög területe).