A megoldásban csak a pozitív osztókat vizsgáljuk. Jelöljük $d(n)$-nel a pozitív egész n szám osztóinak a számát, és tegyük fel, hogy a pozitív n és m számokra

$$\Pi(n)=\Pi(m). \tag{1}$$

Ha n és m közül az egyik 1, akkor $\Pi(1)=1$ miatt és az (1) feltételből $\Pi(n)=1=\Pi(m)$, azaz $n=1=m$, hiszen $\Pi(t)=1$ esetén (t pozitív egész) t-nek nem lehet 1-nél nagyobb osztója, tehát $t\le 1$, $t=1$. Ennek alapján a bizonyításban a továbbiakban szorítkozhatunk az $n\ge 2$, $m\ge 2$ esetre. Legyenek az n osztói az $a_i\big(i=1,\,2,\,\dots,\,d(n)\big)$ számok, ekkor

$$\Pi(n)=a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{d(n)}. \tag{2}$$

Mivel az a_i $\big(i=1,\,2,\,\dots,\,d(n)\big)$ számok páronként különbözőek, osztói az n-nek, és számuk $d(n)$, ezért az $\frac{n}{a_i}$ $\big(i=1,\,2,\,\dots,\,d(n)\big)$ számok is páronként különbözőek, osztói az n-nek $\left(n:\frac{n}{a_i}=a_i\right)$ és számuk $d(n)$. Így az $\frac{n}{a_i}$ $\big(i=1,\,2,\,\dots,\,d(n)\big)$ alakú számok is az n osztóinak egy felsorolása, tehát

$$\Pi(n)=\frac{n}{a_1}\cdot\frac{n}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{a_{d(n)}}=\frac{n^{d(n)}}{a_1a_2\ldots a_{d(n)}}.$$

Ezt (2)-vel megszorozva a $\big[\Pi(n)\big]^2=n^{d(n)}$ összefüggést kapjuk. Ugyanígy következik a $\big[\Pi(m)\big]^2=m^{d(m)}$ egyenlőség. Mivel (1)-ből $\big[\Pi(n)\big]^2=\big[\Pi(m)\big]^2$ adódik, ezért fennáll, hogy

$$n^{d(n)}=m^{d(m)}. \tag{3}$$

Legyen n és m prímtényezős felbontása

$$\begin{gathered} n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r} \quad \text{és}\\ m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_r^{\beta_r}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_i \quad \text{és} \quad \beta_i \quad (i=1,\,2,\,\dots,\,r)\end{gathered} \tag{4}$$

nemnegatív egészek. Mivel n és m közül egyiknek sincs kitüntetett szerepe, ezért feltehetjük, hogy $m\ge n$. Bevezetve a $\gamma=\frac{d(m)}{d(n)}$ jelölést, (3)-ból

$$n=m\gamma \tag{5}$$

következik, amit az előzővel egybevetve $m\ge m^\gamma$, azaz – felhasználva az $x\mapsto m^x$ függvény szigorúan monoton növekvő voltát

$$1\ge\gamma. \tag{6}$$

A (3) feltételből(4) alapján

$$p_1^{\alpha_1d(n)}p_2^{\alpha_2d(n)}\ldots p_r^{\alpha_rd(n)}=p_1^{\beta_1d(m)}p_2^{\beta_2d(m)}\ldots p_r^{\beta_rd(m)},$$

a számelmélet alaptétele szerint ez azt jelenti, hogy $\alpha_id(n)=\beta_id(m)$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,r)$, azaz $0\le\alpha_i=\beta_i\gamma$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,r)$, ebből pedig (6) miatt $0\le\alpha_i\le\beta_i$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,r)$; tehát fennáll, hogy $O<\alpha_i+1\le\beta_i+1$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,r)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozva

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)\le(\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_r+1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek bal oldalán viszont $d(n)$, jobb oldalán pedig $d(m)$ áll, ezért $\gamma=\frac{d(m)}{d(n)}\ge 1$. Ezt (6)-tel egybevetve $\gamma=1$, és így (5)-ből valóban $n=m$ adódik.

Megjegyzés. A megoldásban felhasználtuk a

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1),$$

összefüggést, amelyet a következőképpen láthatunk be. Az $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ számnak pontosan azok a $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r}$ alakú számok az osztói, amelyekre $x_i=0,\,1,\,\dots,\,\alpha_i$ $(i=1,\,2,\,\dots,\,r)$. Ilyen számokból egyrészt $d(n)$ van, másrészt éppen $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)$ hiszen az $x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_r$ számok egymástól függetlenek, lehetséges értékeik száma pedig rendre $\alpha_1+1,\,\alpha_2+1,\,\dots,\,\alpha_r+1$.

Harcos Gergely (Bp., Apáczai Csere J. Gimn., III. o. t.)