I. megoldás. Mivel a körmérkőzések lehetséges végeredményeinek halmaza véges, létezik a bajnokságnak olyan kimenetele (lehet, hogy több is), amikor a pontszámok négyzetösszege maximális. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a pontszámok között nem lehetnek egyenlők. Tegyük fel ugyanis, hogy a bajnokság végén van két csapat, melyek pontszáma egyaránt p. Ekkor kettejük mérkőzésének győztese legalább 1 pontot szerzett, vesztese pedig legalább 1-et veszített, így $1 \le p \le 8$. Tekintsük most a bajnokságnak azt a kimenetelét, ahol e két csapat mérkőzése fordítva alakult, a további mérkőzések pedig ugyanúgy. Ebben az esetben a pontszámok négyzetösszege $(p+1)^2+(p-1)^2-2p^2=2$-vel nő, így eredetileg nem lehetett maximális.

A pontszámok négyzetösszege tehát csak akkor maximális, ha az egyes csapatok pontszámai között nincsenek egyenlők; ilyenkor a pontszámok szükségképpen $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$, négyzetösszegük pedig éppen 285.

II. megoldás. Felhasználjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 0,$$

ha a_i, b_i valósak, és minden $1 \le k \le n$ mellett

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \le b_1 + b_2 + \ldots + b_k,$$

akkor

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n. \tag{1}$$

Az egyenlőtlenség bizonyítása ezen számunk 145. oldalán olvasható az Abel-féle átrendezésről c. cikkben.

Ha most az n résztvevős bajnokság résztvevői csökkenő sorrendben rendre p_1, p_2, ..., p_n pontot szereztek, akkor az első k helyezett az egymás közti mérkőzéseken összesen $\frac{k(k-1)}{2}$ pontot veszített, ezért $p_1 + p_2 + \ldots + p_k \le (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-k)$, ahol $1 \le k \le n$.

Így (1) szerint $x_i = a_i = p_i$, $b_i = n - i$ választással

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 \le (n-1)p_1 + (n-2)p_2 + \ldots + (n-n)p_n. \tag{2}$$

A kapott egyenlőtlenség jobb oldala tovább becsülhető felülről (1) szerint, ha ezúttal az

$$x_i = b_i = n - i, \quad a_i = p_i$$

választással élünk.

Ekkor

$$p_1(n-1) + p_2(n-2) + \ldots + p_n(n-n) \le (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + (n-n)^2. \tag{3}$$

(1) és (3) alapján tehát

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2, \le (n-1)^2 + \ldots + 1^2, \tag{4}$$

és itt nyilván pontosan akkor áll egyenlőség, ha $p_i = n - i$.

A feladatban $n = 10$; ekkor (4) jobb oldalán az első kilenc pozitív egész négyzetösszege, 285 áll.