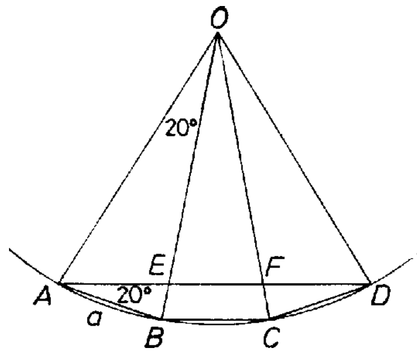
Jelöljük a 18-szög négy szomszédos csúcsát A, B, C, D-vel, a köré írt kör középpontját O-val, az AD átlónak az OB, illetve OC egyenessel való metszéspontját pedig E-vel, illetve F-fel.



Mivel a 18-szög szabályos, ezért $AOB\sphericalangle = BOC\sphericalangle = COD\sphericalangle = \dfrac{360^\circ}{18} = 20^\circ$. Így $AOD\sphericalangle = 60^\circ$, vagyis AOD szabályos háromszög, ezért $AD = AO = 1$. A középponti és kerületi szögek tétele alapján $BAD\sphericalangle = \dfrac{1}{2}BOD\sphericalangle = 20^\circ$. Mivel a BAE és az AOB háromszögekben két szög megegyezik, $BAE\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 20^\circ$, az ABO szög pedig közös, a két háromszög hasonló. Ezért a két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{AO}, \quad EB = \frac{AB^2}{AO} = \frac{a^2}{1} = a^2; \tag{1}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AO}{BO} = 1, \quad AE = AB = a. \tag{2}$$

A hasonlóság következtében az AEB háromszög is egyenlő szárú, ezért $AEB\sphericalangle = ABE\sphericalangle = 80^\circ$. Azonban $AEB\sphericalangle = OEF\sphericalangle$ miatt az OEF háromszög szögei 20°, 80°, 80°, vagyis az OEF háromszög is hasonló az OAB háromszöghöz. Az OEF háromszög oldalait (1) és (2) segítségével határozhatjuk meg: $OE = OB - EB = 1 - a^2$, valamint $EF = AD - AE - FD = AD - 2\cdot AE = 1 - 2a$. A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OE}{EF}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{a} = \frac{1-a^2}{1-2a},$$

és rendezés után éppen a bizonyítandó $a^3 = 3a - 1$ összefüggést kapjuk.