Jelöljük az adott háromszög csúcsait és oldalait a szokásos módon $A$, $B$, $C$, illetve $a$, $b$, $c$-vel. Az $A$-ból induló belső, illetve külső szögfelezőnek a $BC$ egyenessel való metszéspontja legyen $F_A$, illetve $G_A$. Az $F_AG_A$ szakaszra mint átmérőre rajzolt kör legyen $k_A$. Hasonló módon kapjuk a $k_B$ és $k_C$ köröket.

Ismeretes (lásd pl.: Geometriai feladatok gyűjteménye I.), hogy $k_A$ a $B$ és $C$ pontokhoz és a $\frac{c}{b}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-kör, vagyis azoknak a $P$ pontoknak a mértani helye, amelyekre $\frac{PB}{PC}=\frac{c}{b}$. Hasonlóan a $k_B$, illetve a $k_C$ azon $Q$, illetve $R$ pontok mértani helyei, melyekre $\frac{QC}{QA}=\frac{a}{c}$, illetve $\frac{RA}{RB}=\frac{b}{a}$.

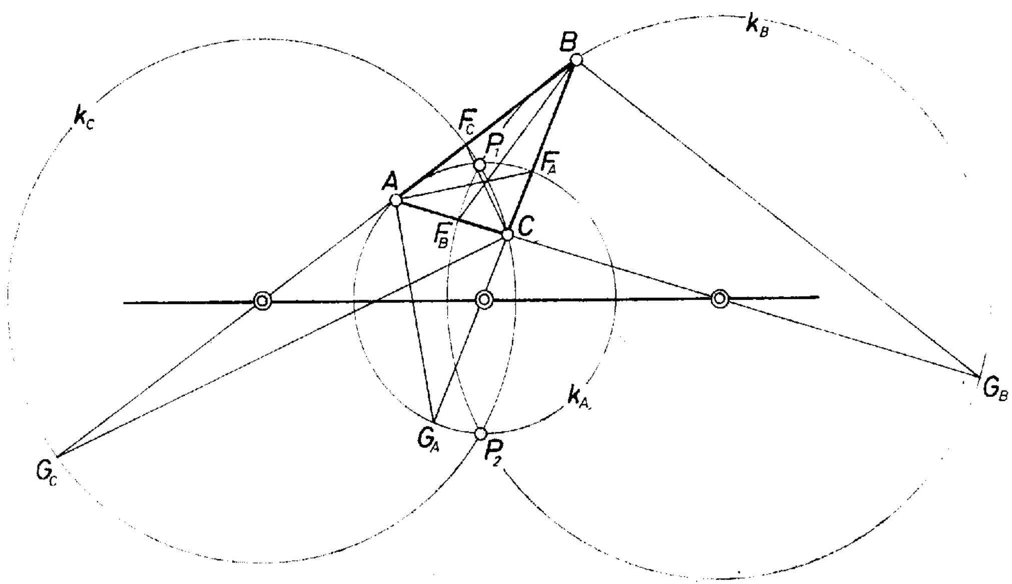
Tekintsük a $k_A$ és $k_B$ körök $P_1$ és $P_2$ metszéspontjait, (Később megmutatjuk, hogy ez a két metszéspont mindig létezik.) Ezekre:

$$\frac{P_iB}{P_iC}=\frac{c}{b} \quad \text{és} \quad \frac{P_iC}{P_iA}=\frac{a}{c}.$$

Tehát

$$\frac{P_iB}{P_iA}=\frac{a}{b} \quad (i=1,\ 2),$$

vagyis ez a két pont rajta van $k_C$-n is. Tehát a $P_1P_2$ szakasz mind a három körnek húrja. Ez azt jelenti, hogy a $P_1P_2$ szakasz felező merőlegesén mind a három körnek a középpontja rajta van. E három középpont pedig éppen a feladatunkban szereplő három pont.




Azt kell még megmutatnunk, hogy a három kör közül valamelyik kettő metszi egymást. Feltehetjük, hogy $\beta$ a háromszög legkisebb szöge. Ekkor $G_A$ a $BC$ oldal $C$-n túli, $G_C$ pedig a $BA$ oldal $A$-n túli meghosszabbításán van, vagyis $C$ az $F_AG_A$, $A$ pedig az $F_CG_C$ átmérőn. Tehát $C$ (a $k_C$ körvonal egyik pontja) belső pontja $k_A$-nak. $A$ (a $k_A$ egyik pontja) pedig belső pontja $k_C$-nek. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy a $k_A$ és $k_C$ körök metszik egymást.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

*Nagy Judit* (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján