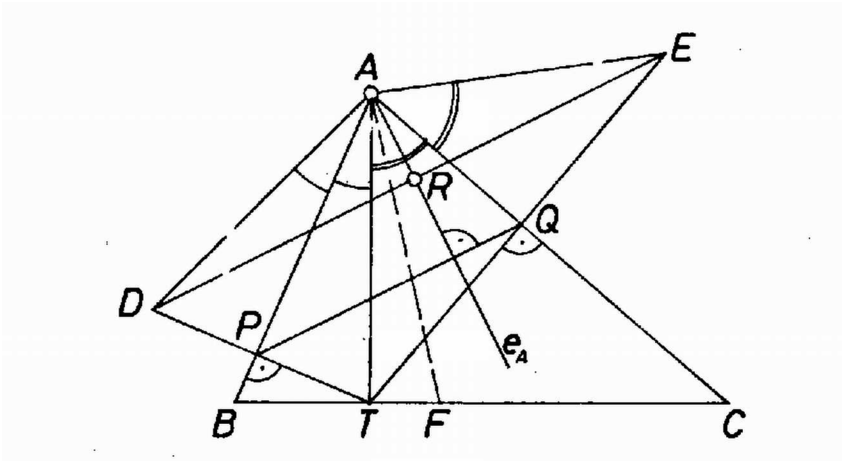
Megmutatjuk, hogy az e_A, e_B, e_C egyenesek mindegyike átmegy az ABC háromszög köré írható kör O középpontján. Elegendő belátnunk, hogy az e_A egyenes átmegy az O ponton, a másik két egyenesre a bizonyítás hasonlóan végezhető el.

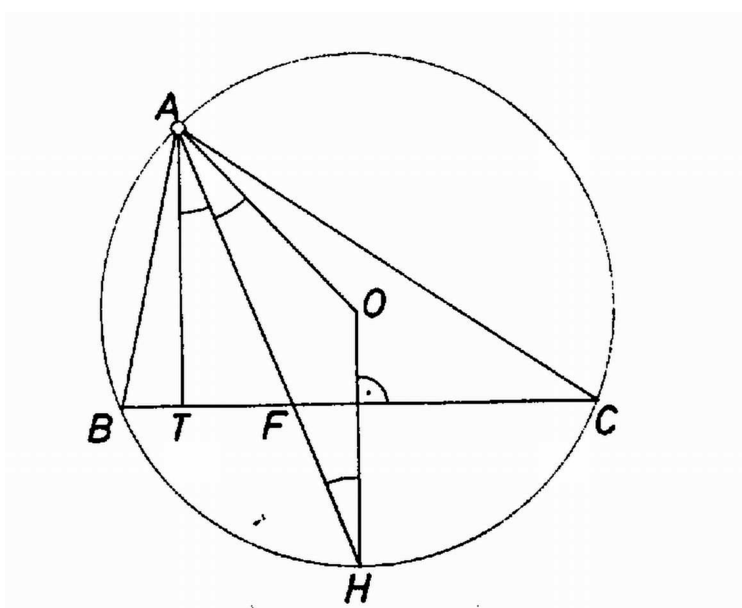


1. ábra

Jelöljük az A-ból induló magasság talppontját T-vel, az A csúcshoz tartozó belső szögfelező és BC metszéspontját F-fel. Először azt bizonyítjuk be, hogy az e_A egyenes megegyezik az AT egyenes AF-re vonatkozó tükörképével. Jelöljük a T pont P-re, illetve Q-ra vonatkozó tükörképét D-vel, illetve E-vel. e_A és DE metszéspontját pedig R-rel (1. ábra). Azt kell belátnunk, hogy $TAR\sphericalangle = 2TAF\sphericalangle$. A PQ szakasz középvonal a TDE háromszögben, ezért DE párhuzamos PQ-val, vagyis e_A DE-re is merőleges. Az AT szakasz AB-re vonatkozó tükörképe AD, AC-re vonatkozó tükörképe pedig AE, ezért az ADE háromszögben $AD = AE$. Továbbá $DAE\sphericalangle = DAT\sphericalangle + TAE\sphericalangle = 2BAT\sphericalangle + 2TAC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle$. Tudjuk, hogy AR merőleges DE-re, ezért AR felezi az ADE egyenlő szárú háromszög A-nál levő szögét, vagyis $DAR\sphericalangle = \frac{1}{2}DAE\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 2BAF\sphericalangle$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva:

$$\begin{aligned}TAR\sphericalangle = DAR\sphericalangle - DAT\sphericalangle = 2BAF\sphericalangle - 2BAT\sphericalangle = 2(BAF\sphericalangle - BAT\sphericalangle) = \\ = 2TAF\sphericalangle.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az e_A egyenes valóban az A-hoz tartozó magasságvonalnak az A-hoz tartozó belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe. Most bebizonyítjuk, hogy ez a tükörkép mindig átmegy az O ponton.



2. ábra

Ismert (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.,* 968. feladat), hogy az AF egyenes és a BC oldal felező merőlegese ugyanabban az M pontban metszi a háromszög köré írt (O középpontú) kört – M a BC ív felezőpontja (2. ábra). Az OA és az OM szakaszok a köré írt kör sugarai, ezért az OAM háromszög egyenlő szárú, tehát $OAM\sphericalangle =$

$OMA\sphericalangle$. Másrészt AT is és OM is merőleges a BC oldalra, ezért a $TAM\sphericalangle$ és az $OMA\sphericalangle$ váltószögek. Így $OAM\sphericalangle = TAM\sphericalangle$, tehát AT-nek AM-re vonatkozó tükörképe átmegy O-n.

Ujváry–Menyhárt Zoltán (Budapest, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján.