(1) $$x^5+5x^3y+5x^2y^2+5xy^3+y^5=1.$$

I. megoldás. Jelölje a feladatban szereplő kétváltozós függvényt $f(x,\,y)$. Könnyen látható, hogy

$$f(x,\,y)=x^5+y^5+\frac{(x+y)^5-x^5-y^5}{x+y}.$$

Innen leolvasható, hogy ha $x+y=1$, akkor az (1) egyenlőség teljesül. Megmutatjuk, hogy $x+y>0$ és $f(x,\,y)=1$ esetén sem $x+y>1$, sem pedig $x+y<1$ nem lehetséges.

Mivel $x+y>0$, azért $x^5+y^5>0$, így ha $x+y>1$, akkor

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}<x^5+y^5.$$

Tehát

$$1=f(x,\,y)=x^5+y^5+(x+y)^4-\frac{x^5+y^5}{x+y}>x^5+y^5+(x+y)^4-(x^5+y^5),$$

azaz

$$1>(x+y)^4,$$

ami nem lehet, hiszen $x+y>1$.

Hasonlóan az $1<(x+y)^4$ ellentmondásra vezet a $0<x+y<1$ feltevés is, tehát $x+y$ csak 1 lehet.

II. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy $x+y=1$ esetén valóban $f(x,y)=1$.

Megmutatjuk, hogy ez csak $x+y=1$ esetén lehetséges. Legyen $y>0$ rögzített. Ekkor

$$f(x,\,y)=x^5+5yx^3+5y^2x^2+5y^3x+y^5$$

pozitív x-ekre az x-nek szigorúan monoton növő páratlan polinomja, így minden függvényértéket pontosan egy helyen vesz föl. Mivel láttuk, hogy az $x=1-y$ helyen ($y<1$-re) $f(x,\,y)=1$, ezért (1)-ből valóban $x+y=1$ következik, ha x és y pozitív.

Bánfalvi Koppány (Szentendre, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás. $f(x,\,y)$-nak az első megoldásban felírt alakjából kiindulva szorozzuk meg az (1) egyenlőség mindkét oldalát $(x+y)$-nal, és rendezzünk nullára. Így

$$(x+y)(x^5+y^5)+(x+y)^5-(x^5+y^5)-(x+y)=0.$$

Csoportosítás után szorzattá alakítva a bal oldalon

$$(x+y-1)(x^5+y^5)+(x+y)\big((x+y)^4-1\big)=0$$

adódik. A második tag második tényezőjéből ugyancsak kiemelhető $x+y-1$, és így a következő alakot kapjuk:

(2) $$(x+y-1)[x^5+y^5+(x+y)^4+(x+y)^3+(x+y)^2+x+y]=0.$$

Látható, hogy ha $x+y>0$, akkor (2) második tényezője pozitív, így (1)-ből valóban $x+y=1$ következik.

Megjegyzés. Nem hagyható el a feladat feltételei közül az a követelmény, hogy x és y pozitívak (ill. az ennél gyengébb $x+y>0$ egyenlőtlenség). Rögzített y mellett ugyanis (2) második tényezője x-nek ötödfokú polinomja, amelynek létezik valós gyöke, és az többnyire nem $1-y$.