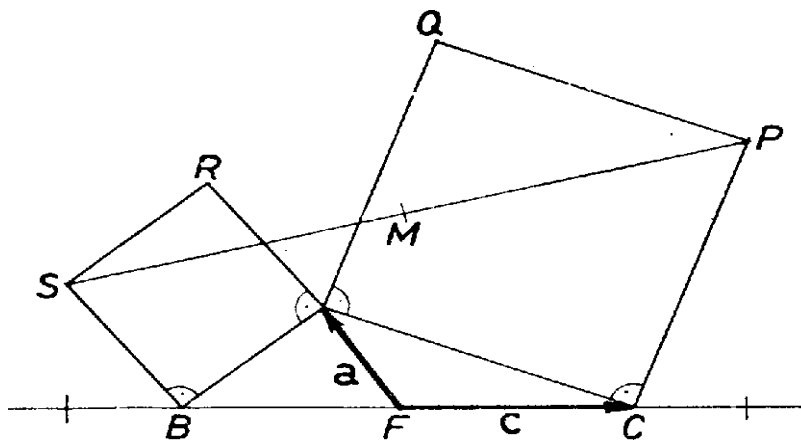


Legyen  $M$  a  $BC$  szakaszra mint átfogóra emelt egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsa  $A$  felsíkjában. Megmutatjuk, hogy ez az  $M$  pont mindig felezi a  $PS$  szakaszt.



A  $BC$  szakasz  $F$  felezőpontjából az  $A$ , illetve a  $C$  pontokba mutató vektorok legyenek  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{c}$ . Ha egy tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektor  $+90^\circ$ -os elforgatottját  $\mathbf{v}'$  jelöli, akkor azt kell megmutatnunk, hogy  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FS}) = \mathbf{c}'$ . (Feltehetjük, hogy az  $ABC$  háromszög az ábrával megegyező módon pozitív körüljárású.) Fejezzük ki az  $\overrightarrow{FP}$  és  $\overrightarrow{FS}$  vektorokat  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{c}$  segítségével:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP} &= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CP} = \mathbf{c} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} + (\mathbf{c} - \mathbf{a})' = \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{a}', \\ \overrightarrow{FS} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BS} = -\mathbf{c} + \overrightarrow{BA}' = -\mathbf{c} + (\mathbf{a} - (-\mathbf{c}))' = -\mathbf{c} + \mathbf{a}' + \mathbf{c}'.\end{aligned}$$

(Számolás közben felhasználtuk, hogy az összegvektor elforgatottja megegyezik a tagok elforgatottjainak összegével, és egy vektor skalárszorosának elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának skalárszorosával.)

E két egyenlőséget összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

*Megjegyzés.* Miután már tudjuk, hogy hol van az  $M$  pont, nem nehéz bebizonyítani, hogy az mindig felezi a  $PS$  szakaszt. A feladat megoldásának első – és talán nehezebb része megsejteni azt, hogy melyik ponton mennek át a  $PS$  egyenesek. Ez például a következő módon történhet: A keresett pontnak rajta kell lennie a  $BC$  szakasz felező merőlegesén, mert ha az  $A$  pontot tükrözzük erre az egyenesre, akkor a tükörképéhez – az  $A'BC$  háromszöghöz – tartozó  $P'S'$  egyenes a  $PS$  egyenest a  $BC$  felező merőlegesén metszi. Ezután már elegendő  $A$ -nak egy speciális helyzetét kiválasztani, s az ehhez az  $ABC$  háromszöghöz tartozó  $PS$  egyenes kimetszi  $BC$  felező merőlegeséből a keresett pontot. A legegyszerűbb helyzet az, amikor  $ABC$  éppen a  $BC$  átmérőjű egyenlő szárú derékszögű háromszög. Könnyen látható, hogy ekkor  $PS$  éppen  $A$ -ban metszi  $BC$  felező merőlegesét.