

**I. megoldás.** Tegyük fel, hogy van olyan  $A$  egész szám, melyre  $\frac{A}{1989}$  tizedestört alakja négy darab szomszédos 9-es számjegyet tartalmaz valahol a tizedesvessző után. Ekkor egy alkalmas tízhatványra  $\frac{10^k \cdot A}{1989}$  tizedestört alakjában közvetlenül a tizedesvessző után áll négy darab 9-es, e hányados törtrésze tehát legalább 0,9999. Ez azonban lehetetlen, hiszen egy egész számot 1989-cel osztva a hányados törtrésze legfeljebb  $\frac{1988}{1989} < 0,9995$ .

*Megjegyzés.* Az természetesen nem igaz, hogy  $\frac{A}{1989}$  tizedestört alakjában egyáltalán nem fordulhat elő négy szomszédos 9-es. Ha például  $A = 9 \cdot 1989 + 1988 = 19889$ , akkor  $\frac{A}{1989} = 9,9994972 \dots$

**II. megoldás.** Az  $\frac{A}{1989}$  hányadosban a tizedesvessző utáni jegyeket úgy kapjuk, hogy az első osztási lépés  $R$  maradékának 10-szeresét maradékosan osztjuk 1989-cel.

Ha  $10R = q \cdot 1989 + r$ , ahol  $0 \leq r < 1989$ , akkor a hányados következő jegye  $q$ , az eljárást pedig az  $r$  maradékkal folytatjuk, ha az nem 0.

Ha, a hányados valamelyik jegye 9-es (azaz  $q = 9$ ), akkor  $R < 1989$  miatt a fenti összefüggésből

$$r = 10R - 9 \cdot 1989 = 1989 - 10(1989 - R).$$

Ha  $k$  darab 9-est kapunk egymás után, akkor a  $k$ -adik lépés utáni  $r_k$  maradékra

$$0 \leq r_k = 1989 - 10^k(1989 - R) \leq 1989 - 10^k,$$

ami negatív, ha  $10^k > 1989$ . Így legfeljebb három egymás utáni lépésben kaphatjuk a 9-es számjegyet a hányadosban.

*Megjegyzés.* 1. Mindkét megoldás gondolatmenetével igazolható, hogy ha  $b$  egy  $n$ -jegyű szám, akkor tetszőleges pozitív egész  $a$ -ra a tizedesvessző után sehol nem állhat  $n$  darab szomszédos 9-es az  $\frac{a}{b}$  hányados tizedestört alakjában.

2. Ismeretes, hogy a racionális számok tizedestört alakja periodikus, jegyeit pedig a II. megoldásban is használt jól ismert osztási eljárással kapjuk. A fentiekből következik, hogy ez az állítás ebben a formában nem fordítható meg: vannak olyan periodikus tizedestörtek, amelyek *nem kaphatók meg* osztási eljárással; éspedig pontosan azok, amelyekben a tizedesvessző után egy helytől kezdve csupa 9-es áll.