Legyen $A=a_1^2+2a_2^2$, $B=b_1^2+2b_2^2$ két érdekes szám. Ekkor

$$\begin{aligned}AB&=a_1^2b_1^2+2a_1^2b_2^2+2a_2^2b_1^2+4a_2^2b_2^2=\\&=(a_1^2b_1^2+4a_2^2b_2^2)+2(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2).\end{aligned}$$

A két teljes négyzetből $4a_1b_1a_2b_2$ „hiányzik”. Ezt az összeg első tagjához hozzáadva, a másodikból pedig kivonva az

$$AB=(a_1b_1+2a_2b_2)^2+2(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

felbontást kapjuk, tehát az AB szorzat is érdekes.

Megjegyzések: 1. Ha a „korrekciós” $4a_1b_1a_2b_2$ tagot más sorrendben adjuk hozzá és vonjuk ki, akkor az ugyancsak megfelelő

$$AB=(a_1b_1-2a_2b_2)^2+2(a_1b_2+a_2b_1)^2$$

felbontást kapjuk.

2. Az azonosság hátterére a komplex számok felhasználásával világíthatunk rá. Az

$$A=(a_1+i\sqrt{2}a_2)(a_1-i\sqrt{2}a_2)$$

és a

$$B=(b_1+i\sqrt{2}b_2)(b_1-i\sqrt{2}b_2)$$

felbontásból a szorzatban a tényezőket felcserélve

$$AB=[(a_1+i\sqrt{2}a_2)(b_1+i\sqrt{2}b_2)(a_1-i\sqrt{2}a_2)(b_1-i\sqrt{2}b_2).$$

Az első tényező $(a_1b_1-2a_2b_2)+i\sqrt{2}(a_1b_2+a_2b_1)$, a második pedig ennek konjugáltja, $(a_1b_1-2a_2b_2)-i\sqrt{2}(a_1b_2+a_2b_1)$. A kettő szorzata tehát

$$(a_1b_1-2a_2b_2)^2+2(a_1b_2+a_2b_1)^2.$$

3. A talált azonosság nem csak az x^2+2y^2 alakú számok szorzatára igaz, hanem tetszőleges d valós számmal az x^2+dy^2 alakú számokra is. Ennek következménye, hogy egész d-re az x^2+dy^2 természetes számok szorzata is ilyen alakú.

Egy másik típusú általánosítása pedig az ún. Lagrange-féle azonosság:

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)&=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2\\&+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2+\\&+(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2+\\&+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2.\end{aligned}$$

Az azonosság szerint négy négyzetszám összegeként előálló számok szorzata is ilyen alakú. A bizonyítás közvetlen számolással történhet, háttérben azonban a *kvaterniók* szerkezeti tulajdonságai állnak. A kvaterniókról olvashatunk lapunk 1986/8–9. számában. A Lagrange azonosság kulcsszerepet játszik annak a nevezetes tételnek a bizonyításában, mely szerint minden természetes szám felírható négy négyzetszám összegeként. Az azonosság miatt ugyanis elegendő ezt a tételt csupán prímekre igazolni.