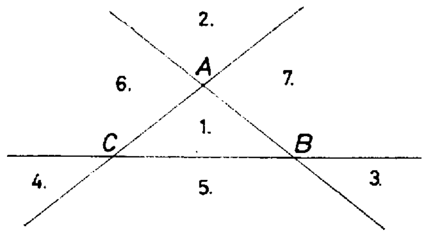
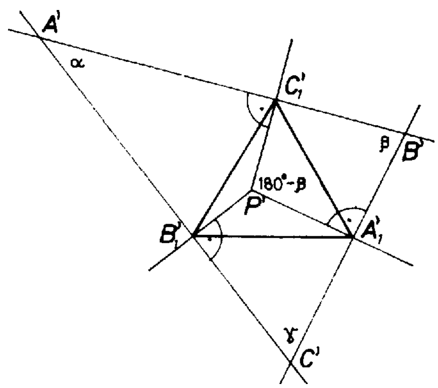
Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az adott háromszög csúcsait jelöljük A, B, C-vel, szögeit α, β, γ-val, a szerkesztendő pontot P-vel, P-nek a háromszög oldalegyenesein lévő merőleges vetületeit pedig A_1, B_1, C_1-gyel. A háromszög oldalegyenesei a síkot hét részre osztják. Számozzuk meg ezeket az 1. ábrán látható módon. Háromféle esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy P-t melyik síkrészben helyezkedik el.



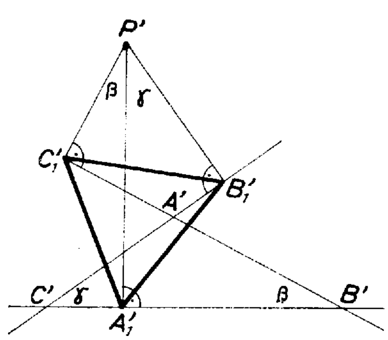
1. ábra

I. eset: P az 1. síkrészben – a háromszög belsejében – van. Ekkor az AB_1PC_1, BC_1PA_1 és CA_1PB_1 négyszögekben két-két egymással szemközti derékszög található (2. ábra), tehát $B_1PC_1\sphericalangle = 180° - \alpha$, $C_1PA_1\sphericalangle = 180° - \beta$ és $A_1PB_1\sphericalangle = 180° - \gamma$.



2. ábra

Ezt felhasználva a szerkesztést a következő módon végezhetjük el: Felveszünk egy tetszőleges $A_1'B_1'C_1'$ szabályos háromszöget. Megszerkesztjük az $A_1'B_1'$ szakasz $180°-\gamma$ szögű és a $B_1'C_1'$ szakasz $180°-\alpha$ szögű látóköríveit. Ezeknek az $A_1'B_1'C_1'$ háromszög belsejében lévő metszéspontját jelöljük P'-vel. A $P'A_1'$, $P'B_1$, $P'C_1$ szakaszokra a P'-től különböző végpontjukban merőlegeseket állítunk. Ezek metszéspontjait jelöljük A', B', C'-vel. Ekkor $B'A'C'\sphericalangle = C_1'A'B_1'\sphericalangle = 360° - (P'C_1'A'\sphericalangle + B_1'P'C_1'\sphericalangle + A'B_1'P'\sphericalangle) = 360° - \big(90° + (180° - \alpha) + 90°\big) = \alpha$, és ugyanígy $A'B'C'\sphericalangle = \beta$, $B'C'A'\sphericalangle = \gamma$. Tehát az $A'B'C'$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Az $A'B'C'$ háromszöget (és vele együtt a P' pontot és az $A_1'B_1'C_1'$ háromszöget is) megfelelően nagyítva az ABC háromszöggel egybevágó háromszöget kapunk, és ebből a háromszögből már csak át kell másolni a P' pont képét az eredeti háromszögbe. Az így szerkesztett P pont nyilván eleget tesz a feltételeknek.

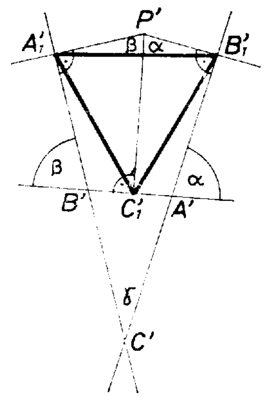


3. ábra

II. eset: P a 2., 3. vagy a 4. síkrészben van. A szerkesztés lényegében megegyezik az első esetben leírtakkal, csak a B_1PC_1, C_1PA_1, A_1PB_1 szögek közül kettő megegyezik az ABC háromszög egy-egy szögével, míg a harmadik az ABC háromszög egyik szögét 180°-ra egészíti ki (pl. a 3. ábrán $B_1PC_1\sphericalangle = 180° - B_1AC_1\sphericalangle = 180° - \alpha$, hiszen B_1PC_1A húrnégyszög, valamint $C_1PA_1\sphericalangle = C_1BA_1\sphericalangle = \beta$, $A_1PB_1\sphericalangle = A_1CB_1\sphericalangle = \gamma$, mivel ezek a szögek a BPC_1A_1, illetve a

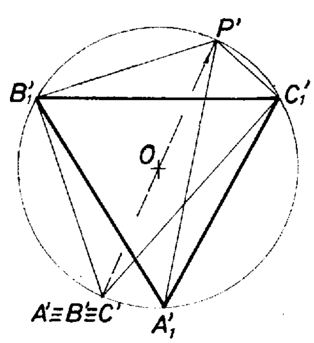
CPB_1A_1 húrnégyszögekben azonos ívhez tartozó kerületi szögek). Ezeknek a szögeknek az ismeretében egy tetszőleges szabályos háromszögből kiindulva a szerkesztendőhöz hasonló ábrát tudunk készíteni, s ezt megfelelően nagyítva meg tudjuk szerkeszteni a P pontot.

III. eset: P az 5., 6. vagy a 7. síkrészben van. Ekkor is az előzőekben leírtak szerint járunk el, most a B_1PC_1, C_1PA_1, A_1PB_1 szögek közül kettő ismét megegyezik az ABC háromszög egy-egy szögével, egy pedig 180°-ra egészíti ki az ABC háromszög harmadik szögét. (A 4. ábrán pl. $B_1PC_1\sphericalangle = \alpha$, $C_1PA_1\sphericalangle = \beta$ és $A_1PB_1\sphericalangle = 180° - \gamma$.)

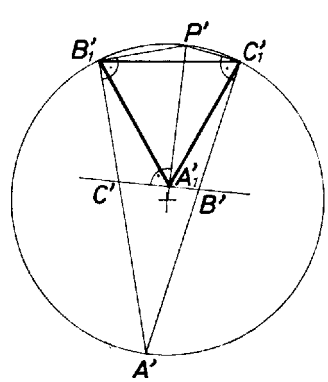


4. ábra

Az I. esetben akkor kapunk megoldást, ha a $180° - \alpha$, $180° - \beta$ és $180° - \gamma$ szögű látókörívek az $A_1'B_1'C_1'$ háromszög belsejében metszik egymást. Mivel az $A_1'B_1'C_1'$, háromszög minden szöge 60°-os, ezért ez pontosan akkor teljesül, ha $180° - \alpha > 60°$,$180° - \beta > 60°$ és $180° - \gamma > 60°$, vagyis ha az eredeti háromszög minden szöge kisebb 120°-nál. A II. esetben akkor kapunk megoldást (3. ábra), ha a B_1PC_1 szög 120°-nál kisebb. Ha ugyanis a szög 120°, akkor a szerkesztés során az $A'B'C'$ háromszög csúcsai egybeesnek (5. ábra), ha pedig 120°-nál nagyobb, akkor a P' pont az $A'B'C'$ háromszög oldalegyenesei által meghatározott síkrészek közül nem a 2.-ba, hanem az azzal „szemben lévő" 5.-be esik (6. ábra).Tehát a 2., 3. és 4. síkrészben akkor kapunk megoldást, ha rendre $\alpha > 60°$, $\beta > 60°$, illetve $\gamma > 60°$. Ugyanígy látható be, hogy az 5., 6., illetve 7. részben pedig akkor van megoldás, ha $\alpha < 60°$, $\beta < 60°$, illetve $\gamma < 60°$.



5. ábra



6. ábra

Összefoglalva : ha az ABC háromszögnek nincs 60°-os szöge, akkor a 2.–5., 3.–6. és 4.–7. síkrészpárok mindegyikében 1-1 megoldás van. Ha minden szög 120°-nál kisebb, akkor az 1. síkrészben is van megoldás, ekkor tehát összesen négy megoldás van, ha viszont létezik 120°-nál nagyobb szög, akkor csak három. Ha azABC háromszögnek egyetlen 60°-os szöge van, akkor az egyik síkrészpárban nincs megoldás, az 1. síkrészben viszont igen, így a megoldások száma ekkor is három. Ha az ABC háromszög szabályos, akkor csak az 1. síkrészben van egyetlen megoldás.

Kőszegi Botond (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján