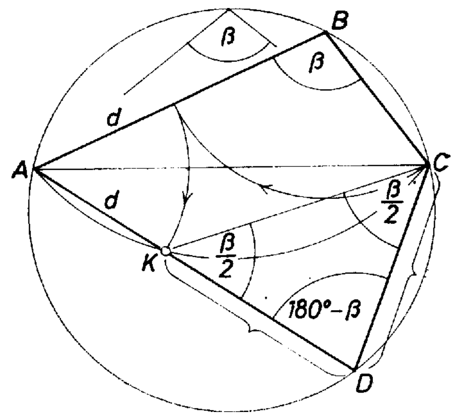
Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a négyszög adott csúcsait A, B, C-vel, a negyedik csúcsát D-vel. Válasszuk úgy a jelölést, hogy $AB \geqq BC$ teljesüljön.



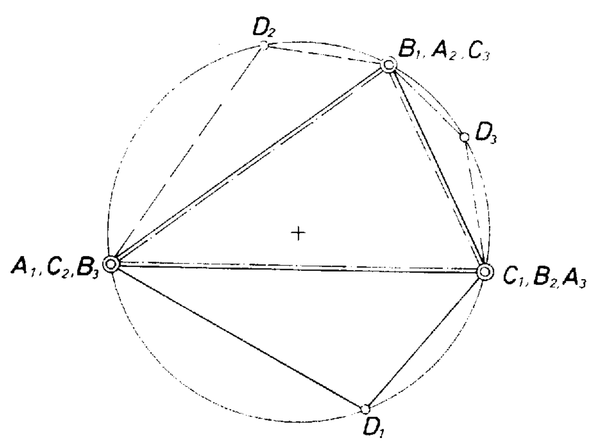
1. ábra

Mivel a négyszög húrnégyszög, ezért a D pont rajta van az A, B, C pontok által meghatározott körön. Az érintőnégyszög tulajdonságból pedig az következik, hogy$AB+CD=BC+AD$, azaz rendezve $AB-BC=AD-CD=d$. Mérjük fel A-ból az AD szakaszra a d távolságot. Jelöljük a kapott szakasz végpontját K-val. Ekkor a CKD háromszög egyenlő szárú, és a D csúcsnál lévő szöge ismert, hiszen az az $ABC\sphericalangle=\beta$-t $180°$-ra egészíti ki. Így $DKC\sphericalangle=$ $=\dfrac{180°-(180°-\beta)}{2}=\dfrac{\beta}{2}$, vagyis $AKC\sphericalangle=180°-\dfrac{\beta}{2}$; tehát az AKC háromszögben ismerünk két oldalt és egy szöget.

Ezek alapján a négyszög szerkesztése a következő: az A, B, C pontok köré kört szerkesztünk, majd az AC oldal fölé $180°-\dfrac{\beta}{2}$ látószögű kört. Ezt A-ból $d=AB-BC$ távolsággal elmetszve kapjuk a K pontot. Végül az AK egyenes kimetszi a körből D-t.

Az így szerkesztett négyszög nyilván húrnégyszög, és egyben érintőnégyszög is. Mivel $CKD\sphericalangle=180°-AKC\sphericalangle=\dfrac{\beta}{2}$, $KDC\sphericalangle=180°-\beta$, tehát KDC egyenlő szárú háromszög, $CD=KD$, vagyis $AB+CD=(BC+d)+CD=$ $=BC+(d+KD)=BC+AD$.

Ha az A, B, C pontok egy egyenesbe esnek, akkor a feladatnak nincs megoldása. Ha A, B, C nem esik egy egyenesbe, akkor mindig 3 megoldás van; a megoldás során ugyanis feltételeztük, hogy a négyszög csúcsainak sorrendje A, B, C, D, azaz D a B-t nem tartalmazó AC köríven van. Ha viszont csak 3 pont van adva, akkor az általuk meghatározott 3 körív bármelyikére kerülhet D (2. ábra). Ha $d=0$ (valamelyik esetben), akkor a húrnégyszög deltoid, és D-t a B-ből AC-re állított merőleges metszi ki a körből.



2. ábra