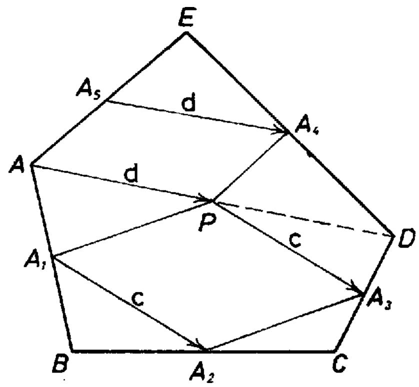
Megmutatjuk, hogy az ötszög AD átlójának P felezőpontja eleget tesz a feltételeknek.



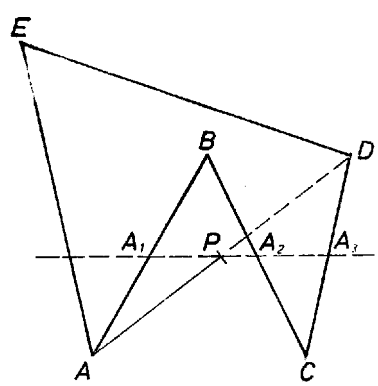
1. ábra

Jelöljük az A pontból az ötszög B, C, D, E csúcsába mutató vektorokat rendre $2\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$, $2\mathbf{d}$, $2\mathbf{e}$-vel. Tudjuk, hogy egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha két szemközti oldalvektora egyenlő. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{PA_3}$ és $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A_5A_4}$. Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor egyenlő a szakasz végpontjaiba mutató vektorok számtani közepével, így

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1A_2} &= \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1} = (\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{b} = \mathbf{c},\\
\overrightarrow{PA_3} &= \overrightarrow{AA_3} - \overrightarrow{AP} = (\mathbf{c}+\mathbf{d}) - \mathbf{d} = \mathbf{c},\\
\overrightarrow{AP} &= \mathbf{d},\\
\overrightarrow{A_5A_4} &= \overrightarrow{AA_4} - \overrightarrow{AA_5} = (\mathbf{d}+\mathbf{e}) - \mathbf{e} = \mathbf{d}.
\end{aligned}$$

Ezzel állításunkat beláttuk.

Megjegyzés. A feladatot a háromszögek és négyszögek középvonalára vonatkozó tételek segítségével is be lehet látni, ekkor azonban a konkáv ötszög esete – amelynek vizsgálatáról sok megoldó megfeledkezett – némi diszkussziót igényel. Konkáv ötszögnél előfordulhat, hogy a paralelogrammák egyike elfajul (2. ábra).



2. ábra