A bal oldali egyenlőtlenségben az egyes törtek nevezője nő, ha mindegyiket $a+b+c$-re növeljük; eközben a törtek értéke csökken. Így

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

A felső becsléshez megmutatjuk, hogy ha x, y és z pozitív számok, és $\frac{x}{y}<1$, akkor $\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}$. Mivel $x=\frac{x}{y}\cdot y$ és $z>\frac{x}{y}\cdot z$, ezért a számlálót csökkentve valóban

$$\frac{x+z}{y+z}=\frac{\frac{x}{y}\cdot y+z}{y+z}>\frac{\frac{x}{y}y+\frac{x}{y}z}{y+z}=\frac{\frac{x}{y}(y+z)}{y+z}=\frac{x}{y}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt mindhárom tört értéke kisebb 1-nél, így a fentiek szerint értékük nő, ha számlálójukhoz és nevezőjükhöz is hozzáadjuk a számlálójukat. Így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, hiszen

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Megjegyzések. **1.** A felső becslés éles, azaz a három tört összege tetszőlegesen megközelítheti a 2-t. Ez könnyen látható az olyan „tűszerű” egyenlő szárú háromszögeken, melyek alapja kicsi. Az alsó becslés azonban javítható, ezt az is indokolja, hogy a bizonyítás során az a, b, c mennyiségekről csupán annyit használtunk fel, hogy értékük pozitív. Azt állítjuk, hogy ha S jelöli a feladatban szereplő összeget, akkor minden háromszögben

$$S\geq\frac{3}{2},$$

és a szabályos háromszög példája mutatja, hogy ez a becslés már éles. A bizonyításhoz – meglepő módon – továbbra sincs szükség a háromszög-egyenlőtlenségre.

Jelölje $a+b+c$ értékét p, és tekintsük az $f(x)=\frac{x}{p-x}$ függvényt. Könnyen látható, hogy f konvex a $(-\infty;p)$ intervallumban.
A vizsgált mennyiség nem más, mint

$$S=\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=f(a)+f(b)+f(c).$$

A Jensen-egyenlőtlenség [1] szerint

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=\frac{\frac{p}{3}}{p-\frac{p}{3}}=\frac{1}{2},$$

ahonnan a bizonyítandó állítás következik.

2. A felső becslés bizonyításakor felhasznált „törtnövelő” lépést érdemes általában is megemlíteni. Ha a pozitív nevezőjű $\frac{x}{y}<\frac{u}{v}$ törtekhez elkészítjük az $\frac{x+u}{y+v}$ törtet – a két tört úgynevezett *mediánsát* – akkor az a két tört között van, tehát

$$\frac{x}{y}<\frac{x+u}{y+v}<\frac{u}{v}.$$

A megoldás során az $u=v$ esetben használtuk ezt az állítást. Ennek belátásához legyen $\frac{x}{y}=t_1$, $\frac{u}{v}=t_2$. Ekkor $t_1<t_2$ és $x=t_1y$, $u=t_2v$. Így $x+u=t_1y+t_2v$, azaz y, $v>0$ miatt $t_1(y+v)<t_1y+t_2v<t_2(y+v)$, és $(y+v)$-vel osztva a bizonyítandó állítást kapjuk.

[1] A Jensen-egyenlőtlenség megtalálható pl.: *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970. (Bp. Tankönyvkiadó 1974. 516–521. o.)