(1) $$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=1.$$

I. megoldás. Mindkét oldalt $(x+1)^2$-nel szorozva kapjuk, hogy

(2) $$x^2(x+1)^2+x^2-(x+1)^2=0.$$

A bal oldalon az első két tag összege két négyzet különbsége:

$$x^2(x+1)^2+x^2=(x^2+x+1)^2-(x+1)^2,$$

és így (2) az

$$(x^2+x+1)^2-2(x+1)^2=0$$

alakot ölti. Két négyzet különbségeként az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2+x+1)^2-\left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2=\left(x^2+(1+\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})\right)\left(x^2+(1-\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})\right).$$

Az első tényező minden (valós) x-re pozitív, a második gyökei pedig:

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Az értelmezési tartományon megfordítható lépéseket végeztünk, így a kapott számok (1)-nek is gyökei.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy egyenletünk bal oldala

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\frac{x^2}{x+1},$$

így az egyenlet az

$$\left(\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+2\frac{x^2}{x+1}+1\right)-2=\left(\frac{x^2}{x+1}+1\right)^2-(\sqrt{2})^2=0$$

alakba írható.

Szorzattá alakítva:

$$\left(\frac{x^2}{x+1}+1-\sqrt{2}\right)\left(\frac{x^2}{x+1}+1+\sqrt{2}\right)=0.$$

Az első tényezőből az

$$x^2+(1-\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})=0$$

egyenlet adódik. Ennek gyökei

$$\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\quad \text{és}\quad \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

A második tényezőből pedig nem kapunk valós gyököket.

Tokodi Tamás (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A felírt egyenletből következik, hogy van olyan φ szög, amelyre $x=\sin\varphi$ és $\frac{x}{x+1}=\cos\varphi$. Ekkor φ-re

$$\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\cos\varphi,$$

ahonnan

(3) $$\sin\varphi\cos\varphi=\sin\varphi-\cos\varphi.$$

Négyzetre emelve, rendezés után $\sin\varphi\cdot\cos\varphi$-re a

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi-1=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ahonnan $\sin\varphi\cos\varphi=\sqrt{2}-1$, a másik gyök abszolút értéke nagyobb mint 1.

Így (3) alapján a gyökök és együtthatók összefüggéséből $\sin\varphi$ és $(-\cos\varphi)$ gyökei a

$$t^2-(\sqrt{2}-1)t-(\sqrt{2}-1)=0$$

egyenletnek.

Innen $\sin\varphi$ – azaz x – lehetséges értékei:

$$\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a talált értékek megoldásai az eredeti egyenletnek.

Tokodi Tamás megoldása nyomán

IV. megoldás. Általában oldjuk meg az

$$x^2+\left(\frac{ax}{x+a}\right)^2=b^2$$

egyenletet. (A feladatban $a=b=1$).

Vezessük be az $y=\dfrac{ax}{x+a}$ ismeretlent. Ekkor az

(i) $$x^2+y^2=b^2,$$

(ii) $$a(x-y)=xy$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az $u=x+(-y)$, $v=x\cdot(-y)$ ismeretlenekre így az

$$u^2-2v=b^2;$$
$$au=-v$$

egyenletrendszer adódik, ahonnan u-ra az

(4) $$u^2+2au-b^2=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek $u_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+b^2}$ gyökei valósak.

Az ezekkel képezett

(5) $$t^2-u_it-au_i=0\quad(i=1,2)$$

egyenlet gyökei a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések alapján x és $-y$.

Ezek szerint az egyenlet lehetséges megoldásai:

$$x=\frac{u_i\pm\sqrt{u_i^2+4au_i}}{2}=\frac{-a+e\sqrt{a^2+b^2}+e\sqrt{-2a^2+b^2+2ea\sqrt{a^2+b^2}}}{2}$$

(az e értéke $+1$ vagy -1).

Ezek közül a valós értékek az eredeti egyenletnek is gyökei, hiszen ha $t=x$-re teljesül (5), azaz

$$x^2-ux-au=0,$$

ahol u-ra teljesül (4), akkor (5)-ből

$$ax=x^2-ux-au+ax=(x-u)(x+a),$$

innen

$$\frac{ax}{x+a}=x-u.$$

Ugyancsak (5)-ből

$$2au=2x^2-2ux,$$

és ezt behelyettesítve (4)-be, valóban

$$b^2=u^2+2au=u^2+x^2-2ux+x^2=(x-u)^2+x^2=\left(\frac{ax}{x+a}\right)^2+x^2.$$