I. megoldás. A megoldás során felhasználjuk azt a jólismert tényt, hogy egy racionális szám négyzete pontosan akkor egész, ha a szám is az: más szóval egy nem négyzetszám négyzetgyöke irracionális.

Ha x és y a két adott racionális szám, akkor a feltétel szerint $(x+y)$ és $4xy$ is egész számok, ezért

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$

is az. Az idézett tétel szerint tehát $x-y$ is egész szám és így $(x+y)+(x-y)=2x$, illetve $(x+y)-(x-y)=2y$ is egész számok.

Ily módon x és y egy-egy egész szám fele. E két szám összege páros, szorzata pedig osztható 4-gyel. Igy mindkét egész szám páros, ami azt jelenti, hogy x és y valóban egész számok.

Czirók András II. o. t. (Miskolc, Földes F. Gimn.)

II. megoldás. Legyen a két racionális szám x és y. Ekkor a feltétel szerint $A=x+y$ és $B=xy$ egész számok. Tekintsük a

$$t^2-At+B=0$$

egyenletet. Ennek éppen x és y a gyöke. Ismeretes, hogy egy egész együtthatós polinom racionális gyökeinek egyszerűsített alakjában a nevező osztója a legmagasabb fokú tagja együtthatójának. Ez azt jelenti, hogy ha egy egész együtthatós polinom legmagasabb fokú tagjának együtthatója. 1, akkor a polinom racionális gyökei egész számok. Ez éppen a bizonyítandó állítást adja.