**I. megoldás.** A feladat szövege szerint minden olyan esetben kell a harmadik egyenletnek olyan gyökét találni, amely $x_1$ és $y_1$ közé esik, amikor ezek az első két egyenletnek gyökei. A lehetőségek vizsgálata céljából határozzuk meg az első két egyenlet gyökeinek a nagyságrendi viszonyát.

A gyökök és az együtthatók közötti összefüggéseket fogjuk megnézni. $b$ pozitivitása miatt mindhárom egyenlet esetében a gyökök szorzata pozitív, tehát azonos előjelűek (a harmadik egyenletnél még nem tudjuk, vannak-e gyökök). Ezt a megfigyelést $a$ pozitivitásával egybevetve azt kapjuk, hogy a második egyenlet gyökeinek az összege pozitív, ezek tehát pozitívak. A másik két egyenlet esetében a gyökök összegének negativitásából a gyökök negativitása következik.

Ezek szerint a második egyenlet mindkét gyöke nagyobb az első egyenlet gyökeinél. Ha tehát találunk a harmadik egyenletnek olyan gyökét, amely a második egyenlet kisebb és az első egyenlet nagyobb gyöke közé esik, akkor ez a gyök egyszerre megfelel minden lehetséges esetnek. Ilyen gyököt pedig kell találnunk (ha a feladat állítása igaz), mert ez az eset is egyike a felsorolható négy lehetőségnek.

Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy a harmadik egyenlet gyökei mint negatív számok biztosan kisebbek a második egyenlet gyökeinél, amelyek pozitívak. Elég tehát azt belátni, hogy a harmadik egyenletnek van olyan gyöke, amelyik nagyobb az első egyenlet nagyobbik gyökénél. Ha van ilyen gyök, akkor persze a nagyobbik gyök is ilyen; ezért feladatunk most már csak annak a bizonyítása, hogy a harmadik egyenlet nagyobbik gyöke nagyobb az első egyenlet nagyobbik gyökénél.

Az első egyenlet nagyobbik gyöke $\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ (ez esetleg meg is egyezhet a „kisebbik” gyökkel). A gyök létezéséből következik, hogy az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, így $a^2-2b=(a^2-4b)+2b$ biztosan pozitív. Ez a szám a harmadik egyenlet diszkriminánsának a negyede; tehát a harmadik egyenletnek van gyöke. Ezek közül a nagyobbik $\dfrac{-2a+\sqrt{4a^2-8b}}{2}$. A bizonyítandó egyenlőtlenség tehát:

$$-a+\sqrt{a^2-4b}<-2a+\sqrt{4a^2-8b},$$

amit rendezve az

$$a+\sqrt{a^2-4b}<\sqrt{4a^2-8b}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel itt a jobb oldal pozitív, ezért elég bizonyítani, hogy a bal oldal négyzete kisebb a jobb oldal négyzeténél:

$$2a^2-4b+2a\sqrt{a^2-4b}<4a^2-8b.$$

Ismét rendezve a

$$2a\sqrt{a^2-4b}<2a^2-4b$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A jobb oldalon most is pozitív szám szerepel, elég tehát azt belátni, hogy a bal oldal négyzete kisebb mint a jobb oldalé, ami rendezés után a $0<16b^2$ egyenlőtlenséghez vezet, ez pedig a $b$-re kimondott feltétel szerint igaz.

**II. megoldás.** Az első megoldásból annyit fogunk kihasználni, hogy a második egyenlet gyökei pozitívak. Legyen $c$ az első és $d$ a második egyenlet tetszőleges gyöke. Helyettesítsük ezeket be az $f(x)=x^2+2ax+2b$ függvénybe:

$$f(c)=2(c^2+ac+b)-c^2.$$

Itt az első tag $c$ választása miatt 0, míg a második negatív, hiszen az első egyenletnek $b$ pozitivitása miatt 0 nem gyöke. Az

$$f(d)=(d^2-ad+b)+(3ad+b)$$

felírásában a jobb oldal első tagja $d$ megválasztása miatt 0, míg a második tag $a$, $b$, $d$ pozitivitása következtében pozitív. Így az

$$f(c)<0<f(d)$$

összefüggéshez jutottunk. Ebből viszont a másodfokú függvények tulajdonságai alapján következik, hogy $f(x)$-nek van $c$ és $d$ között gyöke.