Legyen $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$; ezzel egyenleteink a következő alakba írhatók:

$$x_2=f(x_1),\quad x_3=f(x_2),\ldots,x_{100}=f(x_{99}),\quad x_1=f(x_{100}). \tag{1}$$

Tetszőleges i-re ebből

$$x_i=f(x_{i-1})=f(f(x_{i-2})=\ldots=\underbrace{f}_{1}\big(\underbrace{f}_{2}\big(\underbrace{f}_{100}(x_i)\big)\big)\ldots\big)$$

adódik. Minden k pozitív egészre vezessük be az

$$f_k(x)=\underbrace{f}_{1}\big(\underbrace{f}_{2}\big(\ldots\big(\underbrace{f}_{k}(x)\big)\ldots\big)\big)$$

jelölést; így

$$x_i=f_{100}(x_i)\quad(i=1,2,\ldots,100) \tag{2}$$

A k-ra vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy

$$f_k(x)=\frac{a_kx+b_k}{c_kx+d_k} \tag{3}$$

alakú, ahol a_k, b_k, c_k, d_k alkalmas (csak k-tól függő) valós számok. Ha $k=1$, akkor nyilván $f_1(x)=f(x)=\dfrac{1-x}{x}$. Tegyük fel, hogy (3) teljesül valamilyen n-re; ekkor

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=f\left(\frac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}\right)= \tag{$*$}$$

$$=\frac{1-\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}}{\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}}=\frac{(a_n-c_n)x+(b_n-d_n)}{-a_nx-b_n},$$

azaz $n+1$-re is fennáll a (3) összefüggés, tehát valamennyi k-ra igaz; speciálisan
$f_{100}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

(Az $f_{100}(x)$ értelmezési tartománya persze szűkebb $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ értelmezési tartományánál, de ennek itt nincs különösebb jelentősége.) (2) szerint mindegyik x_1 gyöke az $x=f_{100}(x)$ egyenletnek, ami $(cx+d)$-vel történő szorzás után legfeljebb másodfokú egyenletre vezet. Ez az egyenlet biztosan nem azonosság, hiszen $x<0$ esetén $f(x)<0$, és $x>1$ esetén is $f(x)<0$, ezért minden 1-nél nagyobb x-re $f_{100}(x)$ értelmezett és negatív. Az $x=f_{100}(x)$ egyenletnek tehát legfeljebb két gyöke van, jelöljük ezeket α-val és β-val; x_i ismeretlen értékei csak ezen α és β közül kerülhetnek ki.

Tegyük fel, hogy valamilyen k-ra $x_{k+1}=x_{k-1}=\alpha\neq\beta=x_k$; ekkor

$$\beta=x_k=\frac{1-x_{k-1}}{x_{k-1}}=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

és

$$\alpha=x_{k+1}=\frac{1-x_k}{x_k}=\frac{1-\beta}{\beta}$$

alapján $1-\alpha=\alpha\,\beta=1-\beta$, azaz $\alpha=\beta$, ami ellentmondás. Alkalmas k-ra tehát $x_k=x_{k+1}$, vagyis x kielégíti az $x=f(x)$ egyenletet. Így viszont (1) szerint $x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}$, e közös érték csak az $x=\dfrac{1-x}{x}$ egyenlet megoldása, $\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$ lehet.

Megjegyzés. Az $f_k(x)$ racionális törtfüggvény alakjában az a_k, b_k, c_k, d_k együtthatókról némi kísérletezés után megsejthetjük, hogy

$$f_k(x)=\frac{F_{k+2}x+F_{k+1}}{F_{k+1}x-F_k},$$

ahol F_n az n-edik Fibonacci–számot jelöli, azaz $f_1=0$, $F_2=1,\ldots$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. (Sejtésünk a $(*)$ összefüggés alapján teljes indukcióval már könnyen bizonyítható.) Ennek segítségével az $x=f_{100}(x)$ egyenletről közvetlenül is beláthatjuk, hogy az $x^2+x-1=0$ egyenletre vezet.