Alsó becsléseket keresünk S értékére, majd a nevezők (b és d) lehetséges értékei szerint vizsgáljuk a különböző eseteket. Nyilván föltehető, hogy $b \le d$.

Ekkor

$$S \geqq 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{b-(a+c)}{b} \geqq \frac{b-1987}{b},$$

tehát

$$S \geqq \frac{b-1987}{b}. \tag{1}$$

Feltételünk szerint

$$S = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{bd-ad-bc}{bd} > 0.$$

A számláló pozitív egész, értéke legalább 1, így

$$S \geqq \frac{1}{bd}. \tag{2}$$

Tekintsük ezután S-et a következő alakban:

$$S = \left(1 - \frac{a}{b}\right) - \frac{c}{d} = \frac{b-a}{b} - \frac{c}{d}.$$

A kisebbítendő pozitív, így számlálója legalább 1, c pedig legfeljebb 1987, ezért

$$S \geqq \frac{1}{b} - \frac{1987}{d}. \tag{3}$$

Ha most $b \geqq 1988$, akkor (1) jobb oldala pozitív és b-ben monoton növő, így ebben az esetben

$$S \geqq \frac{1}{1988} > \frac{1}{1988^3}.$$

Ha $bd < 1988^3$, akkor (2) szerint

$$S > \frac{1}{1988^3}.$$

Végül, ha $b < 1988$ és $bd \geqq 1988^3$, akkor $d > 1988^2$, tehát (3) miatt

$$S > \frac{1}{1987} - \frac{1987}{1988^2} > \frac{1}{1987} - \frac{1}{1988} = \frac{1}{1987 \cdot 1988} > \frac{1}{1988^2} > \frac{1}{1988^3}.$$

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, így a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy a fenti bizonyítás 1988 helyett tetszőleges pozitív egész N-re is elmondható.

2. A feladat becslése távolról sem éles. Az *American Mathematical Monthly* 1987 decemberi számában olvasható bizonyítás szerint ha $a + c = N$, akkor

$$\min S = \left(\left\lfloor \frac{2N}{3} + 1 \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{2N}{3} + 1 \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil + 1\right)\right)^{-1}.$$