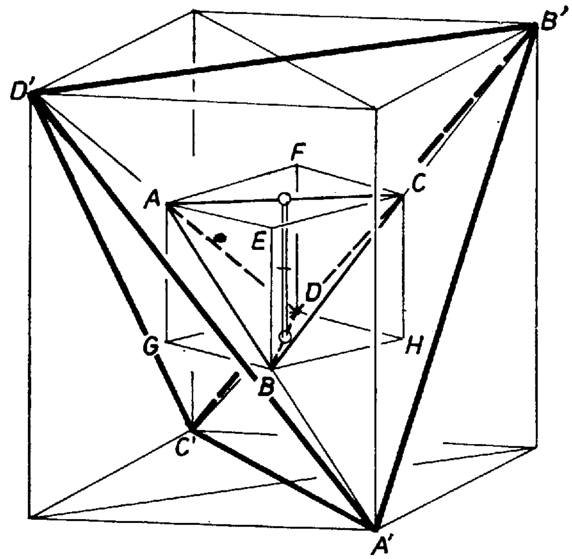
I. megoldás. A feladatot a tetraéderekhez tartozó bennfoglaló paralelepipedonok segítségével oldjuk meg. Ismert (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I., 2069., 2074. és 2083. feladatait), hogy minden tetraédernek létezik bennfoglaló paralelepipedonja, amelynek a térfogata éppen a tetraéder térfogatának a háromszorosa. Tudjuk továbbá azt is, hogy az egységnyi élű $ABCD$ szabályos tetraéder bennfoglaló paralelepipedonja az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ élhosszúságú $AECFGBHD$ kocka. Elegendő az $A'B'C'D'$ tetraéder bennfoglaló paralelepipedonját meghatároznunk.



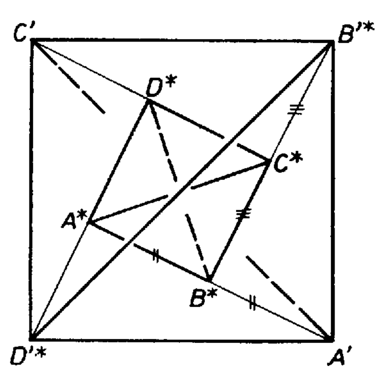
1. ábra

A tükrözések miatt az 1. ábrán látható $A'AD'$, $B'BA'$, $D'DC'$ és $C'CB'$ háromszögekben megegyezik két-két oldal és az azok által bezárt szög, tehát ezek a háromszögek egybevágók. Ez viszont azt jelenti, hogy a bennfoglaló paralelepipedonnak négy olyan oldallapja van, amelyek egyenlő hosszúságú átlókkal rendelkező paralelogrammák, azaz téglalapok. Megmutatjuk, hogy a paralelepipedon másik két lapja pedig négyzet. Ehhez elegendő belátnunk, hogy $A'C'$ és $B'D'$ egyenlő hosszú, egymásra merőleges szakaszok. Tekintsük azt az egybevágósági transzformációt, amely az $ABCDEFGH$ kockának a középpontjára való tükrözéséből, majd pedig az AC és BD szakaszok felezőpontját összekötő egyenes körüli $+90°$-os forgatásból áll. Vizsgáljuk meg, hogy mi lesz az egyes pontok képe:

a tükrözésnél a forgatásnál

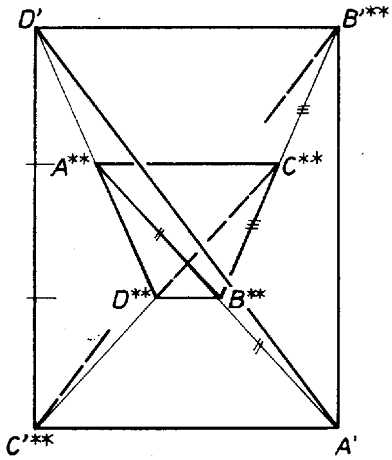
$$\begin{aligned} A \to H \to D \\ B \to F \to A \\ C \to G \to B \\ D \to E \to C. \end{aligned}$$

Ezért A' képe A képének B képére vonatkozó tükörképe, azaz D-nek A-ra való tükörképe, tehát D'. Ugyanígy kapjuk, hogy C' képe B'. Tehát $A'C'$ egyenlő hosszú $B'D'$-vel, a szögük pedig $90°$, mert a tükrözés nem változtatja meg a szöget, az elforgatás pedig éppen $90°$-os volt.



2. ábra

Tehát $A'B'C'D'$ bennfoglaló paralelepipedonja négyzet alapú egyenes hasáb. Vetítsünk merőlegesen ennek a hasábnak az alaplapjára; a P pont képét jelölje P^* (2. ábra). A tükrözések miatt az ábrán egyformán jelölt szakaszok egyenlő hosszúak, tehát a hasáb alapjának az éle az $ABCDEFGH$ kocka élének a $\sqrt{5}$-szöröse. Hasonlóan vetítsünk merőlegesen az $A'B'C'D'$ tetraéder bennfoglaló hasábjának egyik oldallapjára (3. ábra).

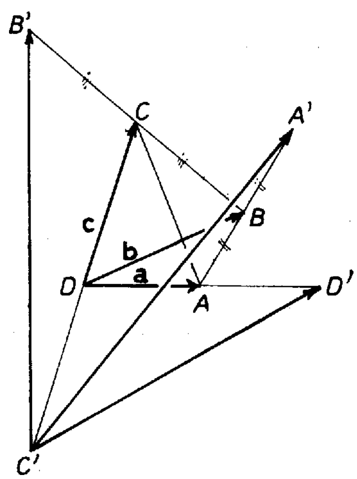


3. ábra

Az egyformán jelölt szakaszok ezúttal is a tükrözések miatt egyenlőek. Származtatásukból következően az $A'C'$, $B'D'$ egyenesek párhuzamosak a kocka $AECF$, $GBHD$ lapjaival, amelyek ezért párhuzamosak a hasáb alapjával. Így a 3. ábrán az $A^{**}C^{**}$ és a $B^{**}D^{**}$ egyenesek távolsága megegyezik a kocka élhosszúságával, ennek tehát a hasáb magasága éppen a 3-szorosa. Ezek szerint a hasáb térfogata a kocka térfogatának $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 3 = 15$ -szöröse, tehát $A'B'C'D'$ térfogata is 15-szöröse $ABCD$ térfogatának.

II. megoldás. A vektorok vegyesszorzatának ismeretében rövidebben is megoldható a feladat.

Legyen $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$. Ekkor $\overrightarrow{DA'} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB'} = 2\mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC'} = -\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{DD'} = 2\mathbf{a}$. Ezért $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{DC'} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$ és ugyanígy $\overrightarrow{C'B'} = 3\mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD'} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$ (4. ábra).



4. ábra

Ekkor az $ABCD$ tetraéder térfogata:

$$V = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}|.$$

Az $A'B'C'D'$ tetraéder térfogata pedig:

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{6}|(2\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c})(3\mathbf{c} - \mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{c})| = \\ &= \frac{1}{6}|12\mathbf{bca} + \mathbf{abc} - 2\mathbf{cba}| = \\ &= \frac{1}{6}|15\mathbf{abc}| = 15V. \end{aligned}$$

$A'B'C'D'$ térfogata az $ABCD$ térfogatának 15-szöröse.

Megjegyzések. 1. A második megoldás során nem használtuk ki az $ABCD$ tetraéder szabályosságát, tehát tetszőleges tetraéderre igaz, hogy ha csúcsait a feladatban leírt módon tükrözzük, akkor a tükörképek által meghatározott tetraéder térfogata az eredeti tetraéder térfogatának 15-szöröse.

2. A hibás dolgozatok 95 %-a abból a helytelen feltevésből keletkezett, hogy az $A'B'C'D'$ tetraéder szabályos. Nem szabad mindig biztosra venni a szimmetria öröklődését.