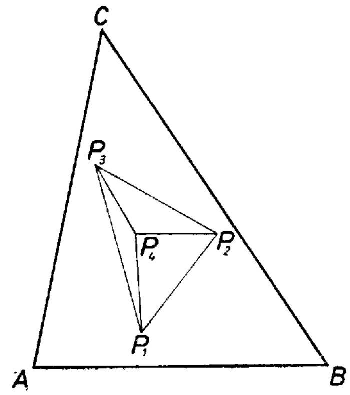
Az adott pontok helyzetétől függően több esetet kell megkülönböztetnünk:

Ha az adott pontok között van három, amelyek egy egyenesbe esnek, akkor az ezek által meghatározott elfajult háromszög területe 0, tehát ekkor az állítás igaz.



1. ábra

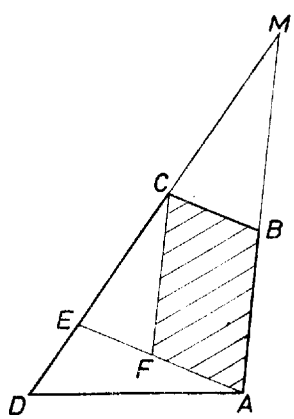
Ha a négy pont között van egy, amelyik a másik három által alkotott háromszög belsejében helyezkedik el, akkor – az 1. ábra jelöléseit használva:

$$T_{P_1P_2P_4} + T_{P_2P_3P_4} + T_{P_1P_3P_4} = T_{P_1P_2P_3} \leqq T_{ABC} = 1.$$

Ebből pedig nyilván következik, hogy a $P_1P_2P_4$, $P_2P_3P_4$ és $P_1P_3P_4$ háromszögek mindegyikének a területe nem lehet 1/3-nál nagyobb; ebben az esetben is igaz a feladat állítása.

Hátra van még annak az esetnek a vizsgálata, amikor az adott pontok egy konvex négyszöget határoznak meg. A bizonyítás során két *segédtételt* fogunk használni :

(1) *Minden konvex négyszögbe beírható olyan paralelogramma, amelynek három csúcsa megegyezik a négyszög valamely három csúcsával.*



2. ábra

Bizonyítás. Ha a négyszög maga is paralelogramma, akkor készen vagyunk. Ha a négyszög nem paralelogramma, akkor feltehetjük, hogy az AB és CD oldalai az M pontban metszik egymást (2. ábra), ahol például A és D, illetve M a BC egyenes különböző oldalain helyezkednek el. Válasszuk ki A és D közül azt, amelyiknek BC-től mért távolsága a kisebb; feltehetjük, hogy esetünkben ez éppen az A pont. Húzzunk A-n keresztül párhuzamost BC-vel, e párhuzamos a CD egyenest E-ben metszi. Feltevéseinkből következik, hogy E a CD szakaszon van, így a keletkezett $ABCE$ trapézt az $ABCD$ négyszög tartalmazza. Azt is tudjuk, hogy $BC < AE$, hiszen M a BC-nek AE-vel ellentétes oldalán van. Tehát a C-n át AB-vel húzott párhuzamos egy F belső pontban metszi az AE szakaszt. Vagyis az $ABCF$ paralelogrammát tartalmazza az $ABCE$ trapéz, és így az $ABCD$ négyszög is. Ezzel az (1) segédtételt beláttuk.

(2) *Egy háromszögben elhelyezkedő paralelogramma területe legfeljebb fele a háromszög területének.*

Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható a 2524. gyakorlat megoldásában, lapunk szeptemberi számának 263. oldalán.

Ezek után a harmadik eset bizonyítása már egyszerű : Az 1. segédtétel alapján kiválasztható a négy pont közül három, melyek egy, a háromszögben fekvő paralelogrammának csúcsai. A 2. segédtétel szerint ennek a paralelogrammának a területe legfeljebb 1/2. Egy paralelogramma három csúcsa által alkotott háromszög területe azonban pontosan a paralelogramma területének fele, esetünkben legfeljebb 1/4.

Barabás Gyula (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján