Mivel $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ és $\frac{c}{a}$ is pozitív számok, a négyzetes és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

(1) $$A = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \leqq \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{3}} = Q,$$

a négyzetes és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség szerint pedig

(2) $$1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{3}} = Q;$$

mindkét egyenlőtlenségben az egyenlőség feltétele $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, azaz $a = b = c$.

(1) és (2) jobb oldala egyaránt Q, ezért a bal oldalak G mértani közepe sem lehet Q-nál nagyobb :

$$G = \sqrt{1\cdot A} \leqq Q;$$

négyzetre emelve a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség nyilván csak akkor teljesül, ha $a = b = c$, ellenkező esetben ugyanis

$$1 = G < A < Q.$$

Megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy ha a pozitív $x_1, x_2 \dots x_k$ számok szorzata 1, akkor az

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n$$

összeg n-ben monoton nő, tehát ha $O < n < m$ egész számok, akkor

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n \leqq x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m,$$

és itt pontosan akkor áll egyenlőség, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Ennek bizonyításához az n-ed rendű hatványközepek hasonló jellegű monotonitását, tehát a $0 \leqq n < m$ esetben teljesülő

(3) $$A_n = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n}{k}} \leqq \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m}{k}} = A_m$$

egyenlőtlenséget használjuk fel. A megoldáshoz hasonlóan most is felírjuk a mértani és számtani közép közötti

(4) $$1 = \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k} \leqq A_1 \leqq A_m$$

egyenlőtlenséget. Mivel m darab pozitív szám mértani közepe nem lehet nagyobb e számok maximumánál,

(5) $$\sqrt[m]{1^{m-n}\cdot A_n^n} \leqq \max(1, A_n) \leqq A_m,$$

így

$$A_n^n \leqq A_m^m,$$

ezt akartuk bizonyítani. Végül ha az x_1 számok között vannak különbözők, akkor a (3), (4), (5) egyenlőtlenségek egyikében sem állhat egyenlőség, így az valóban csak az $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ esetben teljesül.